La théorie de l'utilité espérée et sa remise en cause

La théorie de l'utilité espérée apparaît comme le point de départ incontournable de la théorie de la décision individuelle en incertain. D'abord, parce qu'historiquement le critère de l'utilité espérée s'est imposé, depuis les travaux de Bernoulli, comme le critère de décision dominant (section 1.1). Ensuite, parce que les travaux de von Neumann et Morgenstern (section 1.2) puis de Savage (section 1.3) ont donné au critère de l'utilité espérée un statut normatif difficile à dépasser (sections 1.4 et 1.6). Toutefois, les paradoxes révélés par les études expérimentales (section 1.5) ont ouvert la voie au développement de théories alternatives à la théorie de l'utilité espérée (section 1.6).

Le paradoxe de Saint Petersbourg et la naissance du critère de l'utilité espérée

La théorie de l'utilité espérée apparaît avec la résolution du paradoxe de Saint Petersbourg par Daniel Bernoulli[1]. Ce paradoxe, qui va à l'encontre de l'idée

---

[1] Le paradoxe est soulevé par Nicholas Bernoulli, cousin de Daniel Bernoulli, dans une lettre adressée à Pierre Rémond de Montmort et publiée en 1713 dans la deuxième édition de *Essai d'Analyse sur les Jeux de Hasard*.

En 1728, dans une lettre adressée à Nicholas Bernoulli, le mathématicien Gabriel Cramer avance les principales intuitions que l'on retrouve dans la théorie de Daniel Bernoulli : « (…) *dans leur théorie*, les mathématiciens évaluent la monnaie en proportion de sa quantité alors que, *en pratique*, les gens évaluent la monnaie en proportion de l'utilité qu'ils en retirent. » ; et, Gabriel Cramer propose l'hypothèse suivante quant à la « valeur morale de la richesse » : « (…) alors qu'il est vrai que 100 millions apportent plus de habituelle à l'époque selon laquelle l'évaluation des loteries doit se faire par l'espérance mathématique de gain — notion d'espérance mathématique due à Blaise Pascal —, est constitué au travers du jeu suivant.

Une pièce est lancée jusqu'à ce qu'elle tombe sur "face". Le joueur reçoit 1 ducat si la pièce tombe sur "face" au premier jet, 2 ducats si la pièce tombe sur "face" au deuxième jet, 4 si la pièce tombe sur "face" au troisième jet,...etc., 2^{n-1} si la pièce tombe sur "face" au $n^{ième}$ jet. En posant que la probabilité d'obtenir "face" au $n^{ième}$ jet est $(\frac{1}{2})^n$, l'espérance mathématique de gain concernant ce jeu est infinie :

$$\frac{1}{2}.1+\frac{1}{4}.2+\frac{1}{8}.4+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n.2^{n-1}+\ldots$$

Or, il est convenu d'admettre que « (...) n'importe quel homme relativement raisonnable céderait sa chance avec grand plaisir, pour 20 ducats. La méthode habituelle de calcul donne, en effet, une valeur infinie [à la loterie] bien que personne ne serait prêt à y participer pour un prix modérément élevé » (Daniel Bernoulli (1738, p.31)).

La solution du problème se trouve, selon Daniel Bernoulli, dans l'existence d'une évaluation subjective des gains monétaires : « la détermination de la *valeur* d'un item doit reposer non pas sur son *prix*, mais plutôt sur *l'utilité* qu'il rapporte » (ibid., p.24). Daniel Bernoulli postule donc l'existence d'une fonction d'utilité cardinale subjective[2] dont la forme est croissante et concave (« (...), *l'utilité résultant d'un tout petit accroissement de la richesse va être inversement proportionnelle à la*

satisfaction que 10, ils n'en apportent pas 10 fois plus ». (Gabriel Cramer cité par Daniel Bernoulli (1738)).

[2] Sur les différentes approches de l'utilité, voir la section 1.6.2.

quantité de biens possédés précédemment » (ibid., p.25)[3]. Précisément, Daniel Bernoulli propose la fonction d'utilité *v(x)* suivante, x étant le gain monétaire évalué : $v(x) = b.ln\frac{\alpha+x}{\alpha}$, où b et α sont des constantes (nombres réels strictement positifs) ; α mesure la richesse initiale, (« la quantité de biens initialement possédés »).

Dans le cas de loteries, la substitution de l'utilité du gain au gain lui-même dans le calcul de l'espérance va donner naissance à l'utilité espérée, « l'espérance morale » selon les termes employés par Daniel Bernoulli :

« Prenons ceci comme une règle fondamentale : *Si l'utilité de chaque espérance de profit possible est multipliée par le nombre de fois que ce profit peut survenir, et qu'alors nous divisions la somme de ces produits par le nombre total de cas possibles, une utilité moyenne (espérance morale) sera obtenue, et le profit qui correspond à cette utilité sera égal à la valeur du risque* [c'est-à-dire de la loterie] *en question.* » (ibid., p.24).

---

[3] Est donc posé ce qui sera appelé, avec la révolution marginaliste de la fin du XIX^{ième} siècle, le principe de la décroissance de l'utilité marginale.

Une théorie axiomatique du choix en situation risquée[4]

Introduction

Au-delà des discussions autour du paradoxe de Saint Petersbourg, la théorie de Bernoulli est inachevée principalement pour deux raisons :

1) rien n'est dit quant à la façon permettant de mesurer l'utilité,

2) rien ne permet d'affirmer que l'espérance mathématique de l'utilité est un principe rationnel de décision en situation risquée[5].

La construction axiomatique introduite par von Neumann et Morgenstern (1944) va combler ces lacunes[6]. La théorie de Bernoulli *part* d'une fonction d'utilité cardinale psychologique $v(\cdot)$ définie sur des conséquences monétaires (certaines). Dans un contexte de risque, les utilités des conséquences possibles sont combinées avec les probabilités sur ces conséquences de telle sorte

---

[4] Nous retenons la distinction habituelle de Knight (1921) entre risque et incertitude : le risque caractérise des situations dans lesquelles des probabilités objectives sont affectées aux différents événements possibles, ce qui n'est pas le cas pour les situations incertaines.

Une discussion plus approfondie sur ces notions est fournie dans la section 1.6.1 et dans le chapitre 3.

[5] C'est pourquoi la théorie de Bernoulli ne peut être vue comme une théorie normative : « As such, Bernoulli's theory is mostly descriptive model, even though the expectation principle at the time may have enjoyed much face validity normatively. » (Schoemaker (1982, p.531)).

[6] Notons cependant que des avancées importantes ont eu lieu dans la première moitié du vingtième siècle, notamment avec Ramsey (1926) qui tentera de montrer comment révéler l'utilité, dans le cas de loteries à deux conséquences équiprobables.

que l'espérance mathématique d'utilité définit les préférences entre les loteries. Au contraire, von Neumann et Morgenstern *partent* d'une relation de préférence définie sur des distributions de probabilités. Les axiomes attachés à cette relation de préférence permettent d'une part d'appréhender directement la théorie d'un point de vue normatif — autrement dit, de poser les bases d'un choix rationnel en situation risquée. D'autre part, ils permettent de mener au critère de l'utilité espérée, en tant que critère représentant les préférences. Ces dernières reposent sur un ordonnancement par paires des loteries ; elles sont donc "conceptuellement" ordinales. Toutefois, les axiomes retenus font de la fonction d'utilité représentant ces préférences, une fonction d'utilité cardinale (voir Fishburn (1988a, chapitre 1) et la section 1.6.1.2). La fonction d'utilité von Neumann-Morgenstern, que nous noterons $u(\cdot)$, est donc une fonction d'utilité cardinale préférentialiste — une « utilité cardinale qui est ordinale » (Baumol (1958)) — conceptuellement très différente de $v(\cdot)$, la fonction d'utilité cardinale psychologique de Bernoulli.

Axiomes et théorème de représentation de la théorie EU

Nous présentons maintenant plus précisément la théorie de l'utilité espérée dans le risque (théorie EU). Toutefois, un exposé détaillé et exhaustif serait hors de propos. Nous nous contentons d'une présentation simple, issue de Jensen (1967), dans le cas d'un ensemble fini de conséquences (voir, par exemple, Kreps (1988))[7].

X est l'ensemble fini des ***conséquences*** $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x, y, z, \ldots$

$X^M \subseteq X$ est l'ensemble des ***conséquences monétaires***.

[7] Dans le cas où l'ensemble des conséquences est infini (dénombrable ou non), les présentations les plus connues sont, outre celle de von Neumann et Morgenstern dans la deuxième édition de leur ouvrage, celles de Hernstein et Milnor (1953), Jensen (1967) et Fishburn (1970) : voir Kreps (1988) ou Fishburn (1970, 1988a).

P est l'ensemble des mesures ou ***distributions de probabilités*** sur X : p_1, $p_2,\ldots,\ p_j,\ \ldots,\ p,\ q,\ r,\ \ldots$ C'est-à-dire que P est l'ensemble des fonctions $p: X \rightarrow [0,1]$ telles que $\sum_{x \in X} p(x) = 1$. P est supposé convexe de sorte que $\forall p,q \in P, \forall \lambda \in [0,1]: (\lambda p + (1-\lambda)p) \in P$. Dans le cas où X est fini avec $\#X=m$, une distribution de probabilité sur l'ensemble des conséquences peut s'interpréter comme une ***loterie*** ou une ***perspective risquée*** et s'expliciter ainsi : $p=(x_1,p_1\ ;\ x_2,p_2\ ;\ldots;\ x_i,p_i\ ;\ldots;\ x_m,p_m)$ où $p_i=p(x_i)$.

$\succ$ est une relation binaire sur P, interprétée comme une ***relation de préférence stricte***. P est donc l'ensemble de choix : les préférences d'un individu sont exprimées sur des distributions de probabilités et non sur des conséquences. Les ***relations d'indifférence*** ~ et de ***préférence large*** (ou faible) $\succsim$ sont définies à partir de $\succ$:

$p \succ q$ signifie "p est préféré strictement à q",

$p \sim q$ signifie "p est indifférent à q" et est défini par $\cdot(p \succ q)$ et $\cdot(q \succ p)$,

$p \succsim q$ signifie " p est préféré ou indifférent à q" et est défini par $\cdot\ (q \succ p)$.

<u>Axiome A1 (axiome d'ordre)</u> : La relation de préférence stricte $\succ$ est strictement antisymétrique et négativement transitive c'est-à-dire :

(i) $p \succ q \Rightarrow \neg(q \succ p)$ (***antisymétrie stricte***)

(ii) $[\neg(p \succ q)\ et\ \neg(q \succ r)] \Rightarrow \neg(p \succ r)$ (***transitivité négative***)

<u>Remarques :</u>

(i) L'antisymétrie stricte et la transitivité négative définissent un ***ordre faible***. Poser que la relation de préférence stricte $\succ$ est un ordre faible équivaut à poser que la relation de préférence large $\succsim$ est ***complète*** ($\forall p,q \in P, p \succsim q\ ou\ q \succsim p$) et

transitive ($\forall p,q,r \in P, [\, p \succsim q \text{ et } q \succsim r \,] \Rightarrow p \succsim r$), relation de préférence large dont la partie symétrique — la relation d'indifférence ~ — est une relation d'équivalence c'est-à-dire ***réflexive*** ($\forall p \in P, p \sim p$), ***symétrique*** ($\forall p,q \in P, p \sim q \Rightarrow q \sim p$) et transitive. (voir Kreps (1988, chapitre 2)).

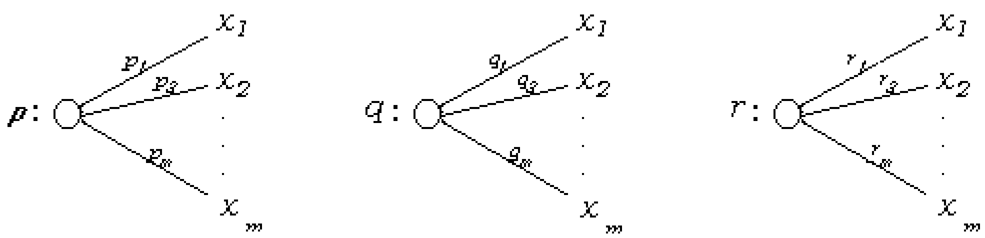
(ii) Soit $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ et soient $p,q \in P$ deux loteries telles que $p(x_1)=1$ et $p(x_i)=0,\ \forall i \neq 1$ et $q(x_2)=1$ et $q(x_i)=0,\ \forall i \neq 2$. p et q donnent donc respectivement x_1 et x_2 avec certitude ; ce sont des ***loteries dégénérées***. Ainsi, le choix dans le certain (étude des préférences sur des conséquences (certaines), par exemple des paniers de biens) apparaît comme un cas particulier du choix dans le risque (étude des préférences sur des loteries ou distributions de probabilités sur des conséquences).

Axiome A2 (indépendance) :

$$\forall p,q,r \in P,\ \forall \lambda \in]0,1[,\ p \succ q \Rightarrow \lambda p+(1-\lambda)r \succ \lambda q+(1-\lambda)r$$

Cet axiome, également appelé *principe de substitution* ou de *rapport commun*, signifie que si une loterie p est préférée à une loterie q, alors une combinaison convexe (non triviale) de p avec une troisième loterie r sera préférée à une combinaison similaire de q avec r.

La rationalité des préférences respectant cet axiome est souvent justifiée de la manière suivante. $\lambda \in]0,1[$ est interprété comme une probabilité et $\lambda p+(1-\lambda)r$ et $\lambda q+(1-\lambda)r$, notons-les L_p et L_q respectivement, sont alors des ***loteries composées*** — c'est-à-dire des distributions de probabilités sur des loteries ; contrairement aux ***loteries simples*** qui sont des distributions de probabilité sur des conséquences. Ces loteries composées peuvent elles-mêmes être vues comme des loteries à deux étapes. Dans le cas de L_p, une première étape conduit à la loterie p avec une probabilité λ et à la loterie r avec une probabilité ($1-\lambda$) et la deuxième étape conduit à une conséquence de la loterie obtenue au cours de la première étape. La procédure est similaire pour l'autre loterie composée L_q. Sachant que la première étape conduit pour les deux loteries composées au même résultat (la loterie *r*) avec la même probabilité (*1-λ*), la préférence entre L_p et L_q doit être indépendante de l'"éventualité *r*", autrement dit ne doit dépendre que de la préférence entre *p* et *q*. La représentation des loteries composées sous forme d'un ***arbre de décision***[8] permet d'illustrer clairement ce qui précède :



L'axiome d'indépendance signifie que, pour la préférence entre L_p et L_q, la branche inférieure de chacun des arbres de décision peut être "oubliée".

[8] Nous retenons les notations habituelles concernant la construction des arbres de décision. Les ronds sont des ***nœuds de chance***, ils sont placés là où la résolution (exogène) de l'incertitude détermine la progression dans l'arbre. Les carrés sont des ***nœuds de décision***. La progression dans l'arbre est alors déterminée par le choix de l'individu considéré.

Axiome A3 (archimédien)

$$\forall p,q,r \in P,\ p \succ q \succ r \Rightarrow \exists \alpha,\beta \in [0,1] : \alpha p + (1-\alpha)r \succ q \succ \beta p + (1-\beta)r$$

L'axiome archimédien, appelé également axiome de continuité, signifie les deux choses suivantes. Premièrement, même si une loterie p est "très fortement préférée" à une loterie q, elle-même préférée à une loterie r, il est toujours possible de trouver un mélange probabiliste de p et de r (la loterie composée $\beta p+(1-\beta)r$) tel que q sera préféré à ce mélange. Deuxièmement, et en présentant les choses différemment, si une loterie p est préférée à une loterie q, il n'existe pas de loterie r "suffisamment dominée en préférence" par q pour qu'aucun mélange probabiliste de p et de r (la loterie composée $\alpha p+(1-\alpha\beta)r$) ne soit préféré à q.

Théorème 1.2.1

Une relation binaire $\succ$ sur P satisfait les axiomes A1 à A3 si et seulement si il existe une fonction d'utilité $u : X \rightarrow \Re$ telle que :

$$p \succ q \Leftrightarrow \sum_{x \in X} p(x).u(x) > \sum_{x \in X} q(x).u(x) \qquad (1.2.1)$$

De plus, si la fonction d'utilité u représente les préférences $\succ$ au sens de (1.2.1), alors toute transformation affine croissante de u représente également les préférences $\succ$ au sens de (1.2.1) ; autrement dit, toute fonction $u' : X \rightarrow \Re$ telle que $u'(\cdot)=au(\cdot)+b$, avec a réel strictement positif et b réel, représente également les préférences $\succ$ au sens de (1.2.1).

La fonction d'utilité u sur X ainsi spécifiée peut alors être étendue à U sur P en définissant $U(p) = \sum_{x \in X} p(x).u(x), \forall p \in P$.

Une théorie axiomatique du choix en situation d'incertitude

La théorie de l'utilité espérée dans un contexte d'incertitude trouve son origine dans les travaux de Ramsey (1926), qui propose une méthode permettant de déterminer conjointement l'utilité et les probabilités, et de de Finetti (1937) sur les probabilités subjectives (ou personnelles). En s'inspirant de ces travaux et de ceux de von Neumann et Morgenstern(1944) sur le traitement de l'utilité, Savage (1954) va fournir une axiomatisation de la *théorie de l'utilité espérée subjective* (SEU). Les axiomes de Savage (1954) permettent de construire une fonction d'utilité et une mesure de probabilité (subjective) à partir des préférences individuelles.

Nous rappelons ici la théorie de Savage (1954), à partir de l'ouvrage de Savage lui-même et des présentations proposées par Fishburn (1988a, 1989) et Sugden (1993). C'est ce cadre qui sera généralement utilisé dans la suite de notre travail.

S est l'ensemble des ***états du monde*** ou états de la nature $s, s_1, \ldots, s_j, \ldots$ Les états du monde (les éléments de S) sont exhaustifs et mutuellement exclusifs. Un seul état est le "vrai état", celui qui est obtenu. Ce dernier n'est connu qu'après la prise de décision, celle-ci n'ayant aucune influence sur l'état qui va se réaliser (***incertitude exogène***).

Les sous-ensembles de S sont les ***événements*** $A,B,C,D,B_1,B_2,\ldots$ B est obtenu (ou se réalise) si le vrai état appartient à cet événement. On note $2^S = \{A : A \subseteq S\}$ l'ensemble des événements. $\varnothing$ est l'***événement vide***. S est l'***événement universel***. A^C est l'***événement complémentaire*** de A sur S.

X est l'ensemble des ***conséquences*** $x,y,z,u,v,w,x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots$

$X^M \subseteq X$ est l'ensemble des ***conséquences monétaires***.

F est l'ensemble des ***actes*** (ou actions) $f,g,h,f_1,f_2,\ldots$ Un acte est une fonction de S dans X. La conséquence obtenue si f est choisie et si l'état du monde s se réalise est notée $f(s)$. Un ***acte constant*** (ou dégénéré) est un acte f tel que $f(s)=x$, $\forall s \in S$ avec $x \in X$, et on note $f=x$. Un acte **constant (par parties) sur A** est un acte tel que $f(s)=x$, $\forall s \in A$, avec $x \in X$, et on note $\boldsymbol{f_A=x}$. Pour tout ensemble fini d'actes $H \subseteq F$, une partition finie de S est une ***partition constante dans ses éléments pour H*** si pour chaque f dans H et chaque événement A dans la partition, f est constant sur A, la conséquence de f sur A étant notée f_A. $\boldsymbol{f_A=g_A}$ signifie que $f(s)=g(s)$, $\forall s \in A$. Et, ***xAy*** est l'acte qui donne x sur A et y sur A^c c'est-à-dire l'acte f tel que $f_A=x$ et $f_{A^C}=y$. Un ***acte*** f est dit ***simple*** lorsque $\{f(s): s \in S\}$ est fini c'est-à-dire lorsque l'acte f a un ensemble fini de conséquences. Notre présentation de la théorie de Savage est restreinte à de tels actes simples (chaque ensemble d'actes a alors une partition constante dans ses éléments).

$\succ$ est une ***relation binaire*** définie sur F : $f \succ g$ s'interprète "f est préféré strictement à g". Les relations de préférence large $\succsim$ ("préféré ou indifférent à") et d'indifférence ~ se déduisent de $\succ$ comme habituellement : $f \succsim g$ ssi $\cdot(g \succ f)$ et, $f \sim g$ ssi $\neg(f \succ g)$ et $\neg(g \succ f)$.

De la relation binaire définie sur F, on déduit également une ***relation de préférence sur X*** au travers de la définition des actes constants : ($f(s)=x$ et $g(s)=y$, $\forall s \in S$)$\Rightarrow$($f \succ g \Leftrightarrow x \succ y$).

On appelle un ***événement nul***, un événement A tel que $\forall f, g \in F, f_{A^C}=g \Rightarrow f \sim g$.

La relation de préférence sur F peut être étendue aux événements de la manière suivante : $A \succ B$ ssi $\forall x,y \in X$, $x \succ y \Rightarrow xAy \succ xBy$. Bien que la relation de préférence sur les événements soit définie à partir de la relation de préférence sur les actes, elle a une signification particulière en termes de comparaison de vraisemblance subjective entre A et B. Cette interprétation conduit à la notation spécifique $A \succ_* B$ qui est lue « ***A est plus probable que B*** ».

On définit enfin une ***relation de préférence sur F, conditionnellement à l'événement A***, notée $\succ_A$:

$$f \succ_A g \text{ si } \forall f',g' \in F,\ \left(f'_A = f_A,\ g'_A = g_A,\ f'_{A^C} = g'_{A^C}\right) \Rightarrow f' \succ g'$$

Les relations $\succsim_A$ et $\sim_A$ sont obtenues comme habituellement.

Un problème de décision peut se représenter par la matrice de décision suivante :

Etats[9] ***Actions***	s_1	…	s_j	…	s_n
f_1	x_{11}	…			
⋮	⋮				
f_i			x_{ij}		
⋮					⋮
f_n				…	x_{nn}

Les axiomes de Savage (1954) sont les suivants, pour tous les $f,g,g',g' \in F$, tous les $x,y,z,w \in X$ et tous les $A,B \subseteq S$ [10]:

[9] Lorsqu'une partition de S constante dans ses éléments existe, une présentation sous forme de conséquences contingentes à des *événements* est substituée à la présentation sous forme de conséquences contingentes à des *états du monde*.

[10] Chaque axiome est suivi d'un bref commentaire et, lorsque cela est utile, d'une matrice de décision donnant un exemple d'actes ayant les caractéristiques de l'axiome exposé.

P1 (axiome d'ordre) :

$\succ$ est un ordre faible (relation binaire strictement antisymétrique et négativement transitive).

Cet axiome est l'analogue, dans l'incertain, de l'axiome A1 dans le risque.

P2 (axiome d'indépendance par rapport aux événements non pertinents) :

$$\left(f'_A = f_A, g'_A = g_A, f_{A^C} = g_{A^C}, f'_{A^C} = g'_{A^C}\right) \Rightarrow \left(f \succ g \Leftrightarrow f' \succ g'\right).$$

	A	**A^c**
f	x	z
g	y	z
f'	x	z'
g'	y	z'

$f \succ g \Leftrightarrow f' \succ g'$ [11]

P3 (axiome de cohérence des préférences sur les actes avec les préférences sur les conséquences)

Pour tout A non nul, $\left(f_A = x, g_A = y\right) \Rightarrow \left(f \succ_A g \Leftrightarrow x \succ y\right)$.

Selon cet axiome, si deux actes f et g sont constants sur un événement A (ils mènent respectivement à x et y si A se réalise), alors la préférence conditionnelle à A entre f et g doit coïncider avec la préférence entre x et y.

	A	**A^c**
f	x	z
g	y	z'

$f \succ_A g \Leftrightarrow x \succ y$

[11] C'est en réalité le principe de la chose sure qui est illustré ici. L'axiome P3 doit donc également être satisfait (voir plus loin).

<u>P4</u> (axiome des probabilités qualitatives) :

$$(x \succ y, z \succ w) \Rightarrow (xAy \succ xBy \Leftrightarrow zAw \succ zBw)$$

Cet axiome assure une cohérence de la relation $\succ_*$ (« est plus probable que ») pour différentes paires de conséquences. En effet il signifie que si l'événement A est jugé plus probable que l'événement B au travers de la comparaison entre x et y — sachant que $x \succ y$ — alors A doit également être jugé plus probable que B au travers de la comparaison entre z et w — sachant que $z \succ w$.

	A	A^c
f	x	y
g	z	w

	B	B^c
f'	x	y
g'	z	w

$$(x \succ y,\ z \succ w) \Rightarrow (f \succ g \Leftrightarrow f' \succ g')$$

<u>P5</u> (axiome de non-trivialité) :

$$\exists z, w \in X : z \succ w.$$

Cet axiome permet d'écarter le cas dans lequel, n'existant pas de conséquences z et w telles que $z \succ w$, tous les événements seraient jugés aussi probables les uns que les autres.

P6 (axiome archimédien) :

Pour toutes actions f et g telles que $f \succ g$, et pour tout x, il existe une partition finie de S telle que, pour chaque événement A dans la partition :

$$\text{(i) } \left(f'_A = x, f'_{A^C} = f_{A^C}\right) \Rightarrow f' \succ g \text{ et,}$$

$$\text{(ii) } \left(g'_A = x, g'_{A^C} = g_{A^C}\right) \Rightarrow f \succ g'.$$

Cet axiome, également appelé *axiome de continuité*, signifie que si un acte f est préféré à un acte g, alors il est possible de trouver une partition de S telle que :

(i) l'acte f' construit par la modification de f rendant f' équivalent à x sur A et identique à f autrement est préféré à g,

(ii) l'acte f est préféré à l'acte g', construit par la modification de g rendant g' équivalent à x sur A et identique à g autrement.

La répétition de la procédure permet donc de rendre les préférences continues, en rendant S infini, et ainsi d'écarter le *cas lexicographique* dans lequel certaines conséquences sont infiniment préférées à d'autres.

	B_1	B_2
f	u	u'
g	v	v'

$f \succ g$

	A	A_1	A_2
f'	x	u	u'
g'	x	v	v'

Prenons, par exemple, $u = 4$, $u' = 6$, $v = 15$, $v' = 0$. Si $x = 1000$, on doit avoir certains A, A_1 et A_2 tels que $f \vee g'$. De même, si $x = -1000$, on doit avoir certains A, A_1 et A_2 tels que $f' \vee g$.

Théorème 1.3.1 (Savage (1954)) Supposons que les axiomes P1 à P6 sont vérifiés. Alors,

(i) il existe une unique **mesure de probabilité** π sur 2^S telle que :

(i.1) A est un événement nul ssi $\pi(A)=0$.

(i.2) Soit $A \in 2^S$, $\exists A' \subset A : \pi(A')=\lambda.\pi(A)$, $\forall \lambda \in]0,1[$.

(i.3) $\forall A,B \subseteq S$, $A \succ B \Leftrightarrow \pi(A) > \pi(B)$.

(ii) il existe une **fonction d'utilité** $u : X \rightarrow \Re$, définie à une transformation affine croissante près, telle que, π étant la mesure de probabilité définie en (i) :

(ii.1) Pour tout acte f et tout acte g et pour tout événement A appartenant à une partition finie de S, constante dans ses éléments,

$$f \succ g \Leftrightarrow \sum_A \pi(A).u(f_A) > \sum_A \pi(A).u(g_A).$$

Remarque 1.3.1 : De la théorie EU à la théorie SEU.

Passer de la théorie SEU à la théorie EU nécessite de faire le lien entre des préférences définies sur F et une distribution de probabilités π sur S d'une part et, des préférences définies sur P — c'est-à-dire sur une distribution de probabilités sur X — d'autre part.

Une difficulté réside dans le fait que, partant d'une distribution de probabilités π sur S, il existe plusieurs actes conduisant à une même distribution de probabilités sur X. C'est le cas de f et de f' dans la table 1.3.1.

	Etats			
	s_1	s_2	s_3	s_4
Actions	0.25	0.25	0.25	0.25
f	3	2	1	0
f'	0	3	2	1

Table 1.3.1 : Actions et distributions de probabilités sur les conséquences.

Soit la ***distribution de probabilité sur X induite par π (sur S) à travers f*** notée $\pi_f \in P$ et définie par : $\pi_f(x) = \pi(\{s \in S: f(s) = x\})$.

<u>Théorème 1.3.2 :</u> Supposons que les axiomes P1 à P6 sont vérifiés.

$$\forall \pi_f, \pi_g \in P, \pi_f = \pi_g \Rightarrow f \sim g.$$

Il s'agit du théorème 1 de Savage (1954, p.70) et du théorème 14.3 de Fishburn (1970 p.201). Ce théorème a l'avantage de rendre explicite le principe de réduction dans le cadre SEU (voir section 1.4.2). Il permet également de rendre immédiat le passage de la théorie SEU à la théorie EU.

<u>Théorème 1.3.3</u> (Fishburn 1970, p.206)

Les axiomes P1 à P6 impliquent l'existence d'une fonction d'utilité de X dans $\Re$, définie à une transformation affine croissante près telle que :

$$f \succ g \Leftrightarrow \sum_{x \in X} \pi_f(x).u(x) > \sum_{x \in X} \pi_g(x).u(x).$$

Remarque 1.3.2

Anscombe et Aumann (1963) proposent une généralisation de la théorie de l'utilité espérée au cas incertain, plus simple que celle de Savage (1954) mais qui nécessite l’existence de probabilités objectives. Il s’agit de la formulation sous forme d’« acte-loteries » (Fishburn (1988a, chapitre 7)). Dans une première étape (appelée « horse lottery »), des probabilités subjectives sont attachées à des états menant à des loteries. Celles-ci donnent, dans une deuxième étape (appelée « roulette lottery »), des conséquences (pures) avec des probabilités objectives.

Propriétés de la théorie de l'utilité espérée

De nombreuses propriétés sont attachées à la théorie de l'utilité espérée. Les principales propriétés mises en évidence dans le cadre EU ont en général leur équivalent dans le cadre SEU. Certaines de ces propriétés apparaissent en tant que lemmes dans les démonstrations des théorèmes de la théorie de l'utilité espérée ou en tant qu'axiomes selon les présentations : leur exposé permet donc de faire le lien entre ces différentes présentations. Il permet également de discuter du statut normatif du modèle (voir la section 1.6.2) et constitue le point de départ des expériences permettant de tester la validité expérimentale de la théorie de l'utilité espérée (section 1.5).

Les principales propriétés de la théorie de l'utilité espérée[12]

La transitivité

Les axiomes A1 ou P1 retiennent une version forte de la transitivité. En effet, les relations de préférences strictes sur P ou F étant des ordres faibles, l'indifférence et la préférence stricte sont transitives.

Un affaiblissement de cette hypothèse consiste à ne retenir que la transitivité de la préférence stricte : la relation $\succ$ sur P ou F est alors appelée un ***ordre partiel***[13]. La non-transitivité de la préférence large semble intuitivement acceptable lorsqu'elle est associée à une succession de petits changements dans les conséquences ou les probabilités : chaque petit changement conduisant à des indifférences entre les loteries ou actions successives, bien qu'il existe une préférence stricte entre les loteries ou actions des extrémités de la "chaîne". (Voir Fishburn (1988, pp.40-41), Luce (1992, p.191) et Diaye (1998)).

En revanche, violer la transitivité de la préférence stricte est généralement interprété comme une irrationalité du comportement. L'argument souvent mobilisé est celui de la ***pompe monétaire***. Soit un individu dont les préférences sur trois actions f, g et h , définies sur des conséquences monétaires, font apparaître le cycle : $f \nu g \nu h \nu f$. Si les préférences sont continues, il doit exister un réel ε suffisamment petit pour que $h\text{-}\varepsilon \nu f$, où $h\text{-}\varepsilon$ est l'action définie à partir de h en ôtant ε à toutes les conséquences de h. Supposons que l'individu détienne h au départ. Compte tenu de ses préférences, il accepte d'échanger g contre h, puis f contre g et

---

[12] Sauf mention contraire, les notations et définitions utilisées dans cette section sont celles posées précédemment pour les théories EU et SEU.

[13] Des définitions et explications supplémentaires se trouvent chez Fishburn (1973). Une étude complète se trouve dans Fishburn (1985).

$h\text{-}\varepsilon$ contre f. A cet instant, l'individu a été victime d'un « ***pari hollandais*** » (« Dutch book ») : il a perdu une somme certaine égale à ε. Si les préférences de l'individu sont telles que $f\text{-}\varepsilon \vee g\text{-}\varepsilon \vee h\text{-}\varepsilon \vee f\text{-}\varepsilon$, $f\text{-}2\varepsilon \vee g\text{-}2\varepsilon \vee h\text{-}2\varepsilon \vee f\text{-}2\varepsilon$...etc., l'individu est victime d'une pompe monétaire, c'est-à-dire qu'il est mené à la ruine.

La continuité

Cette propriété est souvent assimilée aux axiomes A3 et P6. Lorsqu'il s'agit d'un axiome spécifique, il s'écrit, dans le cadre EU :

$$\forall p,q,r \in P,\ p \succ q \text{ et } q \succ r \Rightarrow \exists\ \lambda \in]0,1[\ :\ q \sim \lambda p+(1-\lambda)r$$

Cette propriété assure la continuité en probabilité des préférences ; elle est donc souhaitable d'un point de vue technique. Toutefois, il s'agit d'une propriété discutable lorsque l'on s'intéresse à des combinaisons probabilistes de conséquences de natures différentes — par exemple quand les conséquences ne sont pas toutes monétaires. Ainsi, dans la formulation présentée ci-dessus, si p et q sont des conséquences monétaires certaines et r une mort certaine, il est difficilement acceptable que q puisse être jugé indifférent à un quelconque mélange probabiliste de p et de r[14].

Rejeter la continuité des préférences amène à raisonner à partir d'ordres lexicographiques (voir Fishburn (1988, pp.46-47 et 52-53)). Cette question ne sera pas traitée par la suite.

---

[14] Kreps (1988, p.45) souligne toutefois que la réponse n'est plus si évidente si on reformule le problème dans des termes différents. C'est par exemple le cas lorsque q s'interprète comme « obtenir une faible somme d'argent ici et maintenant » et $\lambda p+(1-\lambda)r$ comme « obtenir une somme importante à 1000km (conséquence q) à condition qu'aucun accident mortel ne survienne pendant le trajet (conséquence r de probabilité $(1-\lambda)$) ».

La dominance

Dans un sens très général, la dominance, appelée aussi parfois monotonie, constitue sans doute la règle première de toute la théorie économique dans la mesure où elle formalise le principe selon lequel "plus est meilleur". Dans le contexte EU, les propriétés suivantes sont des propriétés de dominance :

Propriété 1.4.1

Soient deux loteries $L=(x_1,p_1\ ;\ x_2,p_2\ ;\ldots;\ \mathbf{y},p_i\ ;\ldots;\ x_m,p_m)$ et $L'=(x_1,p_1\ ;\ x_2,p_2\ ;\ldots;\ \mathbf{y'},p_i\ ;\ldots;\ x_m,p_m)$:

$$y' \succ y \Rightarrow L \succ L'$$

Cette propriété caractérise la dominance au sens le plus courant. Elle signifie que lorsqu'une conséquence y est remplacée dans une loterie L par une conséquence y', préférée à y, alors, la loterie L' ainsi obtenue doit être préférée à L.

Propriété 1.4.2

$$(p \succ q \text{ et } r \succ s) \Rightarrow \lambda p+(1-\lambda)r \succ \lambda q+(1-\lambda)s$$

Propriété 1.4.3

$$\text{(i) } (p \succ q \text{ et } p \succsim r) \Rightarrow p \succ \lambda q + (1-\lambda)r$$

$$\text{(ii) } (q \succ p \text{ et } r \succsim p) \Rightarrow \lambda q + (1-\lambda)r \succ p$$

$$\text{(iii) } p \sim q \text{ et } p \sim r \Rightarrow p \sim \lambda q + (1-\lambda)r$$

Pour la théorie SEU, selon que l'on s'intéresse à toutes les partitions constantes de S, à tous les états du monde ou à certains événements, on a respectivement[15] :

[15] voir Fishburn (1988, p.172)

Propriété 1.4.4 (principe de dominance simple) :

Soit $\{A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_n\}$ une partition de S,

$$(f_{A_i} = x_i \text{ et } g_{A_i} = y_i \text{ pour tout } i \text{ et } x_i \succsim y_i \text{ pour tout } i) \Rightarrow f \succsim g,$$
$$\text{si, de plus, } x_i \succ y_i \text{ pour au moins un événement } A_i \text{ non nul alors } f \succ g$$

Propriété 1.4.5 (principe de dominance monotone ou principe de dominance état par état (statewise dominance)) :

$$(\forall s \in S,\, f(s) \succsim g(s)) \Rightarrow f \succsim g$$

Propriété 1.4.6 (principe de dominance conditionnelle) :

$$(A \cap B = \varnothing,\, f \succsim_A g,\, f \succsim_B g) \Rightarrow f \succsim_{A\cup B} g,$$
$$\text{si, de plus, } f \succ_A g \text{ alors } f \succ_{A\cup B} g$$

La théorie de l'utilité espérée vérifie de manière similaire des propriétés de dominance associées aux comparaisons de distributions de probabilités.

Ainsi, la théorie EU vérifie la ***dominance stochastique du premier ordre (DS1)*** telle qu'elle est définie par Hadar et Russel (1969). Soit p^1 la distribution de probabilités cumulées d'une distribution de probabilité p sur X^M : $p^1(x) = \sum_{y \leq x} p(y)$.

p DS1 q si $p \neq q$ et $p^1(x) \leq q^1(x)$ pour tout x. Cela signifie grossièrement que la distribution p donne généralement plus de chance aux meilleures conséquences que la distribution q.

Propriété 1.4.7 :

p DS1 $q \Leftrightarrow u(p) > u(q)$ où $u(\bullet)$ est définie comme dans le théorème 1.2.1 et est strictement croissante sur X^M.

$\Leftrightarrow p \succ q$

Luce (cité par Keller (1992, p.10)) souligne que la DS1 recouvre deux propriétés distinctes : la monotonie (ou dominance) au sens défini par la propriété 1.4.1 et la propriété selon laquelle, dans le contexte d'une loterie à deux résultats, augmenter la probabilité du meilleur résultat doit conduire à une loterie préférée à la loterie initiale.

Dans le cadre SEU, puisque le théorème 1.3.3 permet le passage du cadre SEU au cadre EU, on a nécessairement :

Propriété 1.4.7' :

$\pi_f \; DS1 \; \pi_g \;\Leftrightarrow\; u(\pi_f) > u(\pi_g)$ où $u(\bullet)$ est définie comme dans le théorème 1.3.1 et est strictement croissante sur X^M.

$\Leftrightarrow f \succ g$

La DS1 peut être généralisée lorsqu'on n'a pas nécessairement de mesure de probabilité définie sur *S*. Luce (1992) propose les termes de ***dominance en vraisemblance***.

Propriété 1.4.8 :

$$x \succ y \text{ et } A \succ_* B \Rightarrow xAy \succ xBy$$

Lorsque l'individu est sensible à l'ambiguïté, la dominance en vraisemblance peut être violée (voir le paradoxe d'Ellsberg dans la section 1.5.1.3)

L'indépendance

L'axiome d'indépendance est l'axiome central de la théorie EU dans la mesure où c'est de cet axiome que découle la *linéarité en probabilités* du critère de l'utilité espérée[16] et la *cardinalité*[17] de la fonction d'utilité.

---

[16] Dans le cadre EU, cela signifie que $u(\lambda p+(1-\lambda)q)=\lambda.u(p)+(1-\lambda).u(q)$, $\forall p,q\in P$ et $\lambda\in[0,1]$. (voir Fishburn (1970, chapitre 8)).

[17] Voir la section 1.6.1.2.

Nous avons déjà présenté l'argument classique justifiant l'indépendance sur la plan normatif (section 1.2.2). Nous pouvons également observer que le non-respect de l'indépendance est susceptible de conduire à des violations de la dominance[18].

Dans le cadre EU, supposons par exemple que l'axiome A2 ne soit pas vérifié, de telle sorte que , pour $\lambda \in]0,1[$,

$$\exists p,q,r,s : p \succ q \Rightarrow \lambda q + (1-\lambda)r \vee \lambda p + (1-\lambda)r$$

$$\text{et } r \succ s \Rightarrow (1-\lambda)s + \lambda q \vee (1-\lambda)r + \lambda q.$$

Alors, par transitivité, $(1-\lambda)s + \lambda q \vee \lambda p + (1-\lambda)r$, ce qui viole la propriété de dominance 1.4.2[19].

Outre A2, deux autres axiomes d'indépendance traditionnels sont donnés par :

<u>Propriété 1.4.9 :</u> (Principe de Substitution-Indépendance)

$$\forall p,q,r,t \in P,\ \forall \lambda \in]0,1[,\ \lambda p + (1-\lambda)r > \lambda q + (1-\lambda)r \Leftrightarrow \lambda p + (1-\lambda)t > \lambda q + (1-\lambda)t$$

<u>Propriété 1.4.9 ' :</u> (Herstein et Milnor (1953))

$$\forall p,q,r \in P,\ p \sim q \Rightarrow \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}r \sim \tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}r$$

---

[18] L'axiome d'indépendance est également essentiel relativement à la cohérence des choix dans un contexte de choix dynamiques, c'est-à-dire dans lequel certaines décisions sont prises après résolution de l'incertitude. Nous ne nous intéressons pas à ces aspects par la suite, notre travail se cantonnant à des décisions "à un seul coup" (choix statiques). Nous renvoyons à Machina (1989) pour une revue des problèmes spécifiques aux choix dynamiques.

[19] Voir aussi Machina (1989) et Camerer et Weber (1987) qui montrent que la non linéarité en probabilité implique une violation de la DS1.

Une autre propriété d'indépendance intéressante est la suivante.

<u>Propriété 1.4.9 :</u>

$$(x_1,p_1\ ;\ldots;\ x_m,p_m) \succ (y_1,q_1\ ;\ldots;\ y_m,q_m)$$
$$\Rightarrow (x_1,rp_1\ ;\ldots;\ x_m,rp_m\ ;(1-r)z) \succ (y_1,rq_1\ ;\ y_m,rq_m\ ;(1-r)z),\ \text{avec } r\in]0,1[.$$

Cette propriété est appelée indépendance (réduite) par Segal (1990) pour la distinguer de A2, appelée alors indépendance (composée). L'indépendance (réduite) est le résultat de la combinaison de l'indépendance (composée) et du principe de réduction que nous discutons plus loin.

Dans le cadre SEU, l'indépendance est donnée par l'axiome P2. En utilisant le théorème 1.3.2, donc en ayant recours au principe de réduction, P2 équivaut au principe de substitution-indépendance, lequel est directement lié à A2 dans le cadre EU. P2, combiné à P3, conduit au principe de la chose sûre :

<u>Propriété 1.4.10</u> (principe de la chose sûre) :

$$\left(f_A = f'_A,\, g_A = g'_A,\, f_{A^C} = x,\, g_{A^C} = x,\, f'_{A^C} = y,\, g'_{A^C} = y\right) \Rightarrow \left(f \succ g \Leftrightarrow f' \succ g'\right)$$

De nouveau le lien entre indépendance et dominance peut être facilement mis en évidence au travers d'un exemple simple. Supposons que $f_A = u$, $g_A = v$, $f_{A^C} = x, g_{A^C} = x$, $f'_A = u, g'_A = v$, $f'_{A^C} = y$ et $g'_{A^C} = y$. Si $u \succ v$, si $f \succ g$ et si le principe de la chose sûre n'est pas vérifié, de telle sorte que $g' \vee f'$, alors, clairement, le principe de dominance monotone (propriété 1.4.5) n'est pas vérifié.

Le principe d'invariance

Les effets de contexte et de présentation

Kahneman et Tversky définissent le principe d'invariance[20] de la manière suivante : « Différentes présentations d'un même problème de choix doivent conduire à la même préférence. » (Tversky et Kahneman(1986, p.69)). Derrière ce principe général, on pose la non-pertinence des ***effets de contexte ou de présentation*** c'est-à-dire que les variations concernant les mots utilisés dans la présentation des problèmes de choix, la disposition de ces problèmes, leur ordre de présentation et l'environnement (physique ou social) ne doivent pas modifier les préférences. Par conséquent, ce principe signifie que seules les conséquences et leurs probabilités doivent intervenir dans le choix[21].

Le principe d'invariance est généralement implicite dans la théorie de l'utilité espérée. Le non-respect de celui-ci conduit à *renoncer à l'idée d'un modèle universel de comportement* au profit d'une multiplicité de modèles de comportement relativement aux spécificités des situations de choix envisagées. L'ensemble de la théorie de la décision se trouve ici questionnée et, en particulier, toute tentative de généralisation de la théorie de l'utilité espérée. Dans ce dernier cas, deux questions plus spécifiques peuvent être posées :

---

[20] On trouve également les termes d'extensionalité chez Arrow (1982) et d'indifférence entre des présentations formellement équivalentes chez Luce (1992).

[21] Dans le cadre SEU, le principe d'invariance apparaît chez Savage lorsqu'il définit les actions : « Si deux actes différents ont les mêmes conséquences dans chaque état du monde, il n'y a, du présent point de vue, aucune raison de les considérer comme deux actes différents. Un acte peut par conséquent être assimilé à ses conséquences possibles. » (Savage (1954, p.14)).

1) Est-il équivalent de poser les problèmes de décision en incertain sous forme de loteries ou sous forme d'actions ?

2) Les différentes présentations possibles des actions objet d'un choix influencent-elles la décision ?

Ces deux questions sont abordées respectivement dans les chapitres 2 et 4.

Le principe de réduction[22]

On s'intéresse ici à un cas particulier d'invariance dans la mesure où l'on se focalise sur les différents processus générant les probabilités et attachant ces dernières aux conséquences ; ces processus ne devant pas influencer les préférences selon le principe de réduction.

Dans le cas EU, le principe concerne la réduction des loteries composées en loteries simples.

---

[22] Ce principe est appelé « sophistication probabiliste » (« probabilistic sophistication ») par Machina et Schmeidler (1992)).

<u>Propriété 1.4.11</u> (Réduction des loteries composées)

Une décision à plusieurs étapes[23] doit être indifférente à une décision à une seule étape lorsque ces décisions sont caractérisées par des distributions de probabilités identiques sur les conséquences[24].

L'application du principe dans un cas à deux étapes peut être illustré de la manière suivante. Soient les loteries simples $p^{(j)} = \left(x_1, p_1^{(j)}; \ldots; x_m, p_m^{(j)}\right)$ avec $j=1,\ldots,m$ et la loterie composée $L_q = q_1.p^{(1)} + \ldots + q_n.p^{(m)}$, on a :

$$L_q \sim \left(x_1, \sum_j p_1^{(j)}.q_j; \ldots; x_m, \sum_j p_m^{(j)}.q_j\right)$$

Dans le cadre SEU, on a (Fishburn (1988, p.171)) :

<u>Propriété 1.4.12 :</u> (Principe de Réduction-Identité)

$$\forall f,g \in F,\ \forall \pi_f, \pi_g \in P,\ \pi_f = \pi_g \ \Rightarrow f \sim g$$

<u>Propriété 1.4.13 :</u> (Principe de Réduction)

$$\forall f,g,f',g' \in F,\ \forall \pi_f, \pi_g, \pi'_f, \pi'_g \in P,\ \left(\pi_f = \pi'_f\ , \pi_g = \pi'_g\right) \Rightarrow \left(f \succ g \Leftrightarrow f' \succ g'\right)$$

La propriété 1.4.12 a déjà été présentée (théorème 1.3.2)[25]. Celle-ci et P1 impliquent la propriété 1.4.13.

---

[23] Une décision à plusieurs étapes est telle que la résolution de l'incertitude attachée à une loterie dans la première étape conduit à une autre loterie dans l'étape suivante et ainsi de suite jusqu'à l'étape finale dont les issues ne sont constituées que par des conséquences et non plus par des loteries.

[24] Dans ce contexte, Sarin (1992) parle d'équivalence économique pour qualifier ce principe.

[25] Cette propriété est appelée « axiome d'équivalence » chez Loomes et Sugden (1982).

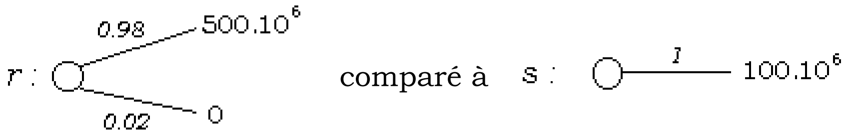
La remise en cause expérimentale de la théorie de l'utilité espérée

Nous présentons dans cette section les ✐paradoxes✐[26] d'Allais et d'Ellsberg ainsi que le phénomène des renversements de préférences. Le paradoxe d'Allais conduit à deux phénomènes plus généraux qui sont l'effet de rapport commun et l'effet de conséquence commune. Ces deux phénomènes constituent une violation de l'indépendance. Le paradoxe d'Ellsberg conduit à l'invalidation de la théorie des probabilités subjectives de Savage et à l'effet de conséquence commune. Le phénomène des renversements de préférences remet en cause la transitivité des préférences.

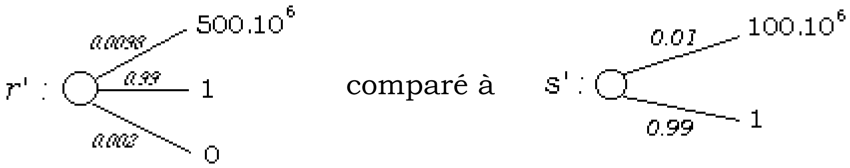
Les paradoxes d'Allais et d'Ellsberg

L'effet de rapport commun

Le problème de décision présenté par Allais (1953) est le suivant :



<u>Problème 1.5.1</u>



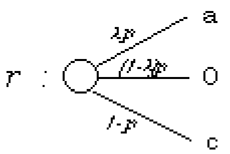
<u>Problème 1.5.2</u>

Soit $q=(1\ ,\ 0.99)$.

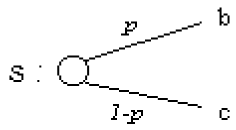
[26] Il ne s'agit évidemment de paradoxes que pour la théorie de l'utilité espérée ; pas pour les théories alternatives qui fournissent une explication de ces phénomènes.

On a $r' = 0.01\ r + 0.99\ q$ et $s' = 0.01\ s + 0.99\ q$. Donc, d'après l'axiome d'indépendance de von Neumann et Morgenstern (A2), $s \succ r \Rightarrow s' \succ r'$. Or, d'après Allais (1953), la majorité des gens préfère *s* à *r* et *r'* à *s'*.

Plus généralement, prenons le problème de choix suivant :



comparé à



Problème 1.5.3

où a >b ≥c sont des conséquences monétaires et où $0 < p \leq 1$ et $0 < \lambda < 1$.

D'après la théorie de l'utilité espérée,

$$r \succ s \Leftrightarrow \lambda p.u(\mathrm{a})+(1-\lambda)p.u(0)+(1-p)u(\mathrm{c}) > p.u(\mathrm{b})+(1-p)u(\mathrm{c})$$

$$\Leftrightarrow \lambda.u(\mathrm{a})+(1-\lambda).u(0) > u(\mathrm{b}) \qquad (1.5.1)$$

Le choix entre *r* et *s* ne doit donc pas dépendre de *p*[27]. Or, l'exemple de Allais correspond à $p=1$ pour le Problème 1.5.1 et à $p=0.01$ pour le Problème 1.5.2, les autres variables restant constantes : $\lambda=0.98$, a=500.10^6 FRF, b=100.10^6 FRF et c=1 FRF.

Cette influence des variations de *p* sur les choix est appelée ***effet de rapport commun***[28]. Il a été reproduit dans de nombreuses autres expériences[29] notamment par Kahneman et Tversky (1979) (Problèmes 3 et 4) avec $\lambda=0.8$, a=4000 ISP (livres

---

[27] C'est là encore l'axiome d'indépendance qui implique ce résultat puisque c'est de cet axiome que découle la linéarité en probabilité du critère de l'utilité espérée.

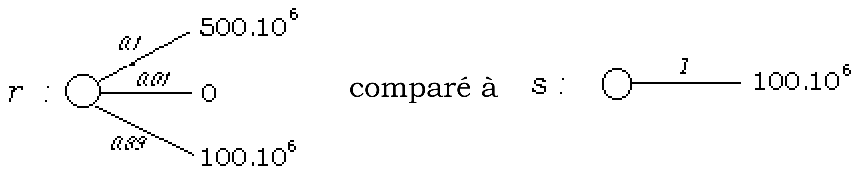
[28] L'expression vient du fait que, quelle que soit la valeur de *p*, le rapport des probabilités P(a)/P(b) est constant (il est égal à λ).

[29] Voir Camerer (1995) pour une revue détaillée.

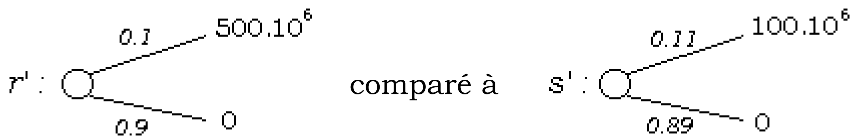
israéliennes), b=*3000* ISP et c=*0*, *p* passant de *1* à *0.25*. Dans ce dernier cas comme dans celui de Allais, on a affaire à un cas particulier puisque l'un des problèmes de choix comporte une loterie de type *s* qui donne b avec certitude (cas où $p=1$). Kahneman et Tversky (1979) parlent alors d'*effet de certitude*. L'effet de rapport commun ne se vérifie néanmoins pas seulement dans ce cas particulier. Dans les Problèmes 7 et 8 de Kahneman et Tversky, on a $\lambda=0.5$, a=*6000* ISP, b=*3000* ISP et c=*0* : 86% des individus préfèrent la loterie de type *s* quand $p=0.9$ et 73% préfèrent la loterie de type *r* quand $p=0.002$.

L'effet de conséquence commune

L'autre problème de décision présenté par Allais (1953) est le suivant :



Problème 1.5.4

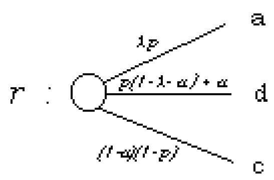


Problème 1.5.5

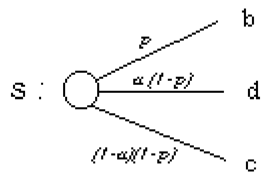
D'après le principe de substitution-indépendance (ou d'après le principe de la chose sûre (propriété 1.4.10) et le théorème 1.3.2), $s \succ r \Rightarrow s' \succ r'$ car, en posant $q_1 =(500.10^6, \frac{10}{11}\ ; 0, \frac{1}{11})$, $q_2 =(100,1)$ et $q_3 =(0,1)$, on a : $r = 0.11q_1 + 0.89q_2$, $s = 0.11q_2 + 0.89q_2$, $r' = 0.11q_1 + 0.89q_3$ et $s' = 0.11q_2 + 0.89q_3$.

Or, d'après Allais (1953), la majorité des gens préfère *s* à *r* et *r'* à *s'*.

En prolongeant le problème 1.5.3, nous proposons, dans le problème 1.5.6 une présentation généralisée des effets de conséquences communes et de rapport commun dans le contexte des loteries.



comparé à



Problème 1.5.6

où a >b >d et $c \in \Re$ sont des conséquences monétaires et $0< p \leq 1$, $0\leq \alpha \leq 1$, et $0< \lambda<1$.

D'après la théorie de l'utilité espérée,

$$r \succ s \Leftrightarrow \lambda p.u(\mathrm{a}) + [p(1-\lambda-\alpha)+\alpha].u(\mathrm{d}) + (1-\alpha)(1-p)u(\mathrm{c}) > p.u(\mathrm{b})+\alpha(1-p)u(\mathrm{d})+(1-\alpha)(1-p)u(\mathrm{c})$$
$$\Leftrightarrow \lambda.u(\mathrm{a})+(1-\lambda).u(\mathrm{d}) > u(\mathrm{b}),$$

d'où une indépendance des préférences par rapport à α (et p).

Cependant, l'***effet de conséquence commune*** apparaît lorsque, dans le Problème 1.5.6, le choix entre r et s est dépendant de α. Dans l'exemple de Allais, on a a=500.10^6 FRF, b=c=100.10^6 FRF, d=0, λ=10/11, p=0.11 et α=0 pour le choix entre r et s et α=1 pour le choix entre r' et s'. Chez Kahneman et Tversky (1979) (Problèmes 1 et 2), on a a=2500 ISP, b=c=2400 ISP, d=0, p=0.34 et λ=33/34. 82% des individus préfèrent s à r quand α=0 et r à s quand α=1[30].

L'influence de l'ambiguïté

Ellsberg (1961) propose deux expériences hypothétiques[31].

---

[30] Voir Camerer (1995) et la section 5.1.2 pour d'autres tests de l'effet de conséquence commune.

[31] De nombreuses expériences réelles ont reproduit les résultats d'Ellsberg (voir Camerer et Weber (1992)).

La première repose sur deux urnes : l'urne I est composée de *100* boules rouges ou noires, dans des proportions inconnues, et l'urne II est composée exactement de *50* boules rouges et *50* boules noires. Dans les deux cas, on s'intéresse au pari concernant la couleur d'une boule tirée dans l'urne : si l'individu parie sur le rouge (respectivement le noir) il reçoit *100* USD si la boule tirée est de couleur rouge (respectivement noire) et *0* sinon. L'imprécision attachée aux proportions de boules rouges et de boules noires dans l'urne I caractérise une ***ambiguïté*** associée au problème de choix concernant cette urne. Au contraire, le problème de choix concernant l'urne II ne fait intervenir aucune notion d'ambiguïté[32] puisque les proportions de boules rouges et de boules noires sont connues de manière précise. Le problème de choix est résumé dans les tables 1.5.7 et 1.5.8.

	Rouge	*Noire*
	(100 boules)	
$PariR_I$	100	0
$PariN_I$	0	100

Table 1.5.7 : L'Urne I

	Rouge	*Noire*
	(50 boules)	*(50 boules)*
$PariR_{II}$	100	0
$PariN_{II}$	0	100

Table 1.5.8 : L'Urne II

La majorité des gens préfère parier sur une boule rouge (noire) dans l'urne II plutôt que sur une boule rouge (noire) dans l'urne I.

Or, d'après la théorie SEU,

$$PariR_{II} \succ PariR_I \Leftrightarrow p(R_{II}).u(100) + p(N_{II}).u(0) > p(R_I).u(100) + p(N_I).u(0)$$

$$\Leftrightarrow p(R_{II}) > p(R_I)$$ [33]

Et,

---

[32] Cette notion est abordée de manière plus détaillée à partir du chapitre 3.

[33] Rappelons que la fonction d'utilité *u(•)* est définie à une transformation affine croissante près de sorte que l'on peut poser arbitrairement *u(0)=0*.

$$PariN_{II} \succ PariN_I \Leftrightarrow p(R_{II}).u(0) + p(N_{II}).u(100) > p(R_I).u(0) + p(N_I).u(100)$$

$$\Leftrightarrow p(N_{II}) > p(N_I)$$

Soit, par sommation, $p(R_{II}) + p(N_{II}) > p(R_I) + p(N_I)$ ce qui contredit la théorie des probabilités selon laquelle nous devrions avoir : $p(R_{II}) + p(N_{II}) = p(R_I) + p(N_I) = 1$. La théorie SEU est donc incompatible avec des choix sensibles à l'ambiguïté.

Remarque 1.5.1 : Le paradoxe d'Ellsberg peut également être interprété comme une violation de la dominance en vraisemblance (propriété 1.4.8).

$PariR_{II} \succ PariR_I \Rightarrow p(R_{II}) > p(R_I)$

$\Rightarrow p(N_I) > p(N_{II})$, selon la théorie des probabilités,

$\Rightarrow N_I \succ_* N_{II}$

$\Rightarrow PariN_I \succ PariN_{II}$, d'après 1.4.8.

□

La deuxième expérience hypothétique repose sur une urne composée de *30* boules rouges et *60* boules noires ou jaunes (dans des proportions inconnues). La matrice des paiements (en dollars) est donnée dans la table 1.5.9 en fonction de l'action choisie et de la couleur de la boule tirée dans l'urne.

	Rouge *(30 boules)*	*Noire* *(60 boules)*	*Jaune*
f	100	0	0
g	0	100	0
f'	100	0	100
g'	0	100	100

Table 1.5.9

La majorité des gens préfère *f* à *g* et *g'* à *f'*. Ces préférences contredisent :

1) *Le principe de la chose sûre* (propriété 1.4.10) : *f* et *g* (respectivement *f'* et *g'*) conduisent à une même conséquence *0* (respectivement *100*) sous l'événement "La boule tirée est de couleur jaune" ; *f* et *f'* de même que *g* et *g'* sont identiques par

ailleurs c'est-à-dire sous l'événement "La boule tirée est de couleur rouge ou noire". Par conséquent, $f \succ g$ devrait conduire à $f' \succ g'$.

2) *L'additivité des probabilités*. En effet, de manière similaire à l'expérience précédente, on a : $f \succ g \Leftrightarrow p(R) > p(N)$ et $g' \succ f' \Leftrightarrow p(N \cup J) > p(R)+p(J)$ où $p(R)$, $p(N)$, $p(J)$ et $p(N \cup J)$ représentent les probabilités de tirer, respectivement, une boule rouge, une boule noire, une boule jaune et une boule noire ou jaune. Ces deux inéquations sont contradictoires si $p(N \cup J)=p(N)+p(J)$.

de Finetti (1937) montre que des croyances qui ne prennent pas la forme de probabilités (additives) mettent l'individu ayant de telles croyances à la merci d'un pari hollandais (section 3.3.1.2). Dans le cas spécifique du paradoxe d'Ellsberg où l'individu exprime une aversion à l'ambiguïté, de tels paris hollandais peuvent également être construits (voir Camerer et Weber (1992, p.359)). Ainsi, de telles croyances ne seraient pas cohérentes et l'individu les possédant ne serait pas rationnel[34].

Le phénomène des renversements de préférences

Le phénomène des renversements de préférences et ses deux explications

Le phénomène des renversements de préférences (PRP) trouve ses racines dans les travaux des psychologues Slovic et Lichtenstein (1968) qui montrent que l'évaluation d'une loterie par un individu est sensible à la méthode utilisée pour réaliser cette évaluation. Ainsi, les *prix* de vente et d'achat d'une loterie semblent corrélés principalement aux *conséquences* de la loterie alors que l'attrait ("attractiveness") d'une *loterie* par rapport à une autre semble plus corrélé aux *probabilités* de gain et de perte. Il semble donc possible de construire des

---

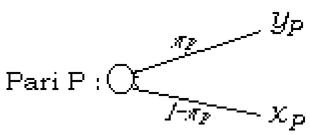
[34] L'appréciation critique de ce point de vue se trouve dans la section 3.3.

expériences dans lesquelles un individu préfère une loterie à une autre tout en affectant un prix plus élevé à cette dernière. De telles expériences sont réalisées par Lichtenstein et Slovic (1971,1973) et Lindman (1971). Il s'agit de demander aux individus :

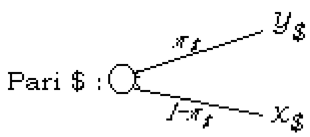
1) d'exprimer un choix entre deux loteries. L'une, nommée le ***Pari $***, comporte une probabilité faible $\pi_\$$ d'obtenir un gain élevé $y_\$$, l'autre conséquence étant une conséquence défavorable, notée $x_\$$. L'autre, nommée le ***Pari P***, comporte une probabilité forte π_P d'obtenir un gain modeste y_P, la conséquence défavorable étant notée x_P,

2) d'évaluer le Pari P, d'une part, et le Pari $, d'autre part, en exprimant leurs prix de vente, c'est-à-dire les montants minimums c_P et $c_\$$ tels que les individus sont indifférents entre vendre le Pari P et le Pari $ aux prix c_P et $c_\$$ respectivement et jouer ces loteries[35]. Nous avons donc trois problèmes de décision :

1) Un problème de choix entre deux loteries :

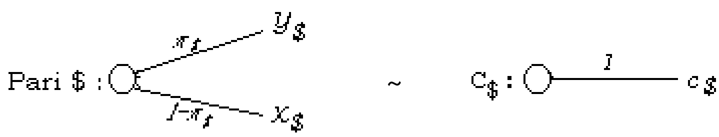


comparé à



[35] Il est également possible de demander des prix d'achat c'est-à-dire les montants que les individus sont prêts à offrir pour acheter les loteries. Cette technique est utilisée dans l'expérience n°2 de Lichtenstein et Slovic (1971).

2) Un problème d'évaluation du prix de vente $c_\$$ du Pari $. Ce problème revient à déterminer l'***équivalent certain*** du Pari $ c'est-à-dire le montant $c_\$$ tel que l'individu est indifférent entre le Pari $ et la loterie $C_\$$ donnant $c_\$$ avec certitude :



3) Un problème d'évaluation du prix de vente c_P du Pari P. Il s'agit donc de déterminer c_P tel que :

Les résultats donnent le plus souvent :

$$\text{Pari P} \succ \text{Pari \$ et } c_\$ > c_P.$$

Il s'agit bien d'un *renversement de préférences* puisque, selon ce type de réponse, le problème de choix semble faire du Pari P la "meilleure loterie" alors que dans le problème d'évaluation, c'est le Pari $ qui semble être la "meilleure loterie"[36]. Ce type de renversement est appelé, pour des raisons que nous allons voir, le ***PRP***

---

[36] On s'intéresse ici au cas le plus fréquemment étudié, à savoir celui dans lequel les espérances mathématiques des deux loteries sont positives. Dans l'autre cas, les réponses les plus fréquentes sont : Pari $ $\succ$ Pari P et $c_P > c_\$$.

prévu par opposition à l'autre PRP possible — nommé *PRP non prévu* — : celui pour lequel on a Pari \$ $\succ$ Pari P et $c_P > c_\$$.[37]

La mise en évidence de ce phénomène par Lichtenstein et Slovic est motivée, on l'a dit, par l'idée émise par Slovic et Lichtenstein (1968) selon laquelle le processus de traitement de l'information par les individus diffère selon la tâche qu'ils ont à accomplir. D'après Lichtenstein et Slovic (1971), les résultats qu'ils obtiennent confirment en partie cette idée et permettent de préciser les processus de décision mis en œuvre par les individus[38]. Si « les mécanismes déterminant les choix ne sont pas clairs » (Lichtenstein et Slovic (1971, p.54)), en revanche, les techniques d'évaluation monétaire des loteries (détermination d'un prix de vente ou d'achat) « fournissent un point de départ évident : le montant à gagner » (Ibid.).

[37] La table 1.5.11 donne, à titre d'exemple, les caractéristiques des loteries utilisées par Lichtenstein et Slovic (1973) dans le cas des loteries ayant des espérances mathématiques positives, ces espérances mathématiques étant identiques pour chaque paire de loteries.

π_P	y_P	x_P	$\pi_\$$	$y_\$$	$x_\$$
7/12	+17	-7	2/12	+97	-11
10/12	+9	-3	3/12	+91	-21
9/12	+10	-2	3/12	+73	-15
8/12	+16	-11	3/12	+94	-22
11/12	+12	-24	2/12	+79	-5
11/12	+10	-2	5/12	+65	-31
10/12	+16	-2	5/12	+48	-12
9/12	+18	-2	3/12	+85	-11
10/12	+20	-10	5/12	+64	-20
8/12	+30	-15	4/12	+95	-25

Table 1.5.11

Cette expérience a eu lieu dans un casino de Las Vegas : les loteries ont toutes été réellement jouées, la méthode de Becker, DeGroot et Marschak (1964) (voir plus loin) a été utilisée pour révéler les prix de vente. Les résultats donnent *81%* de PRP prévus et *10%* de PRP non prévus.

[38] Voir également les commentaires apportés par Slovic et Lichtenstein (1983).

Ainsi, nous aurions affaire au processus d'***ancrage-ajustement*** suivant : lorsqu'ils ont à déterminer c_P ou $c_\$$, les individus se focalisent d'abord sur la conséquence favorable (l'ancre) puis ajustent à la baisse leur évaluation en fonction des probabilités de gain et de perte. Or, cet ajustement est très imprécis dans la mesure où ces probabilités sont « difficiles à traduire en unités monétaires » (Ibid.), contrairement au montant à gagner qui « se traduit directement en un montant à demander [prix de vente] » (Ibid.) ; d'où une évaluation finale fortement influencée par le point de départ (l'ancre). Un tel processus favorise clairement, dans la tâche consistant à fixer un prix de vente, les loteries ayant une conséquence favorable élevée — donc les loteries de type Pari \$ au détriment des loteries de type Pari P. Le PRP *prévu* par cette explication est donc bien celui généralement observé dans les expériences. Le PRP constituerait, de ce point de vue, une *violation du principe d'invariance* puisqu'une même loterie pourrait ne pas avoir la même valeur, aux yeux des individus, selon le *mode de réponse* utilisé pour recueillir l'évaluation.

Toutefois, la violation du principe d'invariance n'est pas la seule explication possible du PRP.

Supposons que le PRP soit vérifié et que le principe d'invariance soit respecté. On a : Pari P $\succ$ Pari \$ et $c_\$ > c_P$.

Soit $\varepsilon \in \Re^{+*}$ tel que $c_\$ > c_P + 2\varepsilon \Leftrightarrow c_\$ - \varepsilon > c_P + \varepsilon$. Soient les loteries :

$$C_\$' : \bigcirc \xrightarrow{\;1\;} c_\$ - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad C_P' : \bigcirc \xrightarrow{\;1\;} c_P + \varepsilon$$

Si on suppose la dominance et la continuité respectées, on doit avoir, pour une certaine valeur de ε, le cycle suivant :

$$\text{Pari P} \succ \text{Pari \$} \succ C_\$' \succ C_P' \succ \text{Pari P.}$$

Autrement dit, le PRP apparaît ici comme une *violation de la transitivité de la préférence stricte*[39].

Nous verrons dans la section 5.1.3.1 dans quelle mesure il est possible de départager ces deux explications du point de vue de leur validité expérimentale.

Les Tentatives d'Affaiblissement du Phénomène

Plus que des travaux cherchant à fournir une explication du PRP, Lichtenstein et Slovic ont surtout initié, chez les économistes, toute une série d'études tentant de remettre en cause la portée des résultats obtenus par ces deux psychologues. Grether et Plott (1979) ont été les premiers économistes à tenter de montrer que les tests du PRP menés par les psychologues n'étaient pas pertinents pour l'analyse économique. Les termes de l'introduction de leur article sont très explicites : « Ce papier rapporte les résultats d'une série d'expériences destinée à discréditer les travaux des psychologues du point de vue de leur application à l'analyse économique. » (Grether et Plott (1979, p.623)).

Incitations, Arbitrage, Apprentissage

Une critique classique à l'égard des études expérimentales concerne *la qualité des incitations* utilisées pour s'assurer d'une réelle motivation des sujets. Grether et Plott (1979) vont mener deux expériences censées ne pas être sujettes à ce type de

---

[39] Fishburn (1988a, pp.45-46) distingue un ***PRP fort*** lorsque $c_{\$} \geq y_P$ et un ***PRP faible*** lorsque $c_{\$} < y_P$. Puisque Pari P $\succ$ $C_{\$}$ et par définition de $C_{\$}$, la dominance simple (propriété 1.4.4) est nécessairement violée dans le cas du PRP fort. Et Fishburn (1988a, p.46) commente : « Although I see nothing unreasonable about weak reversals, strong reversals are another matter. ».

critique[40]. Leurs résultats semblent éloquents : dans l'expérience 1, le groupe de sujets soumis à des incitations monétaires exhibe une fréquence de PRP prévus supérieure à celle observée dans le groupe de contrôle — celui dans lequel les choix sont hypothétiques[41]. Toutefois, Pommerehne et alii (1982) et Reilly (1982) prétendent que la motivation des sujets reste insuffisante. Mais, en augmentant les sommes en jeu et/ou en améliorant les informations fournies aux sujets, la fréquence de PRP prévus, bien que diminuant, reste importante : entre 42.7% et 52.8% pour Pommerehne et alii (1982) et entre 34% et 49.1% pour Reilly (1982).

Berg et alii (1985) et Chu et Chu (1990) cherchent à montrer les limites du PRP en soumettant les individus exhibant ce phénomène à une pompe monétaire. Cette dernière s'amorce de la façon suivante. Soient deux loteries L et L' et leurs prix de vente révélés par le sujet $P_V(L)$ et $P_V(L')$. Si $L \succsim L'$ et $P_V(L) < P_V(L')$, alors l'expérimentateur engage trois transactions successives :

1) il vend L' au sujet au prix $P_V(L')$,

2) il échange L' contre L,

3) il achète L au prix $P_V(L)$.

---

[40] Il est à noter que l'expérience 3 de Lichtenstein et Slovic (1971) ainsi que l'expérience de Lichtenstein et Slovic (1973) comportent déjà des incitations monétaires.

[41] Les fréquences observées sont de 69.7% pour le groupe avec incitations monétaires contre 55.9% pour le groupe avec choix hypothétiques.

Notons le commentaire apporté par Thaler (1987). « Ce résultat, bien que constituant une surprise considérable pour les économistes qui l'ont obtenu, n'est pas véritablement contre intuitif. Si les effets étudiés sont réels, la présence d'incitations monétaires renforce simplement l'effet en rendant les sujets attentifs. » (Thaler (1987, p.119-120)).

A l'issue de cet arbitrage, le sujet se retrouve sans loterie et a perdu une somme égale à $P_V(L')-P_V(L)$.

Berg et alii (1985) réalisent l'arbitrage une fois c'est-à-dire : 1) ils demandent aux sujets leurs choix et leurs prix de vente pour différentes paires de loteries, 2) ils réalisent l'arbitrage pour les sujets ayant renversé leurs préférences, 3) ils demandent à nouveau les choix et les prix de vente. Bien qu'ils observent une diminution de la ✐force✐ des renversements — mesurée par la différence entre les prix de vente des paris P et ceux des paris $ —, la fréquence des renversements ne diminue pas significativement par rapport aux expériences précédentes.

Chu et Chu (1990), quant à eux, réalisent l'arbitrage plusieurs fois pour une seule paire de loteries. Leurs résultats semblent montrer, premièrement, que la fréquence du PRP ne diminue pas significativement dans un contexte de décision simple (une seule paire de loteries traitée) comparé au contexte habituel avec plusieurs paires de loteries[42,43]. Deuxièmement, dans un contexte de choix simple, le PRP disparaît après trois arbitrages. Troisièmement, lorsque l'on répète la séquence précédente (décision-arbitrage-décision, 3 fois) successivement pour trois paires de loteries, la fréquence des PRP diminue de plus en plus vite au fur et à mesure des séquences. Ainsi, *l'arbitrage et l'apprentissage affaibliraient le PRP.* Toutefois, le fait que Chu et Chu retiennent un contexte de décision simple

---

[42] Les auteurs reprennent dans ce cas les six paires de loteries utilisées par Reilly (1982).

[43] Les résultats de Chu et Chu sont en réalité assez ambigus. Dans le groupe A de leur expérience 1, les fréquences de PRP prévus sont respectivement de 47.3% pour le problème de décision à 6 paires de loteries et 41% pour le problème de décision à 1 seule paire de loteries. Mais, dans le groupe B, les fréquences sont respectivement de 48.5% et 20%, soit dans ce cas une différence significative.

constitue sans doute une faiblesse. Dans ce contexte, l'expérience montre simplement que lorsqu'on révèle au sujet que l'on est en train de l'escroquer, il modifie son comportement[44]. Cela ne nous dit pas si, en retournant au contexte expérimental habituel, le PRP ne réapparaîtrait pas. Par ailleurs, on ne sait pas non plus combien de temps l'effet d'apprentissage persiste.

La Critique de la Méthode de Révélation des Prix de Vente

Karni et Safra (1987) et Segal (1988) tentent de faire du PRP un artefact[45], en s'attaquant à la méthode de révélation des prix de vente généralement utilisée, à savoir celle proposée par Becker, DeGroot et Marschak (1964) — notée méthode BDM par la suite. Cette dernière a pour but d'inciter les individus à annoncer leurs "vrais" prix de vente c'est-à-dire à révéler leurs équivalents certains lors du problème d'évaluation des loteries. La méthode BDM est donc censée pouvoir éliminer des réponses non motivées ou stratégiques — cherchant à "battre le jeu" — sources de renversements de préférences. On procède de la manière suivante :

1) Il est demandé aux individus d'annoncer un prix de vente P_v pour la loterie *L* considérée.

---

[44] Il s'agit d'ailleurs d'une des nombreuses limites de l'argument de la pompe monétaire contre les intransitivités (voir les sections 2.4.1 et 4.3.4).

[45] Nous suivons le sens donné à ce mot par Guala (2000) : « Artifacts are interpretations, and mistaken ones, of a certain set of data. They are cases of misleading connections between data and phenomena [i.e., regularities occurring in some specific experimental situation], typically due to method of observation: when the data are contaminated by some unknown factors, for instance; or when the scientist hold an incorrect theory of theorem experimental apparatus he is using. » (Guala (2000, p.50)).

2) Un prix d'offre P_o est sélectionné par tirage au sort d'une certaine somme dans un intervalle donné[46].

3) Si le prix de vente annoncé est inférieur ou égal au prix d'offre sélectionné, l'individu reçoit le prix d'offre. En revanche, si le prix de vente annoncé est strictement supérieur au prix d'offre sélectionné, la loterie est jouée et l'individu reçoit le résultat correspondant.

Afin de montrer dans quelle mesure la méthode BDM permet de révéler les équivalents certains des loteries, considérons l'exemple simple suivant.

Soient $L=(y,\pi\,;\,x,(1-\pi))$[47] et $P_o \in [0,9]$ avec P_o suivant une loi uniforme sur cet intervalle. La méthode BDM peut être interprétée comme une loterie à deux étapes qui donne L avec une probabilité $\frac{P_v}{10}$[48] et les conséquences $P_v, P_v+1, \ldots, 9$ avec chacune une probabilité égale à $\frac{1}{10}$. Posons à titre d'exemple l'équivalent certain de la loterie L, noté EC(L), égal à 5. La stratégie consistant à annoncer P_v=EC(L) est-elle la meilleure pour le décideur ?

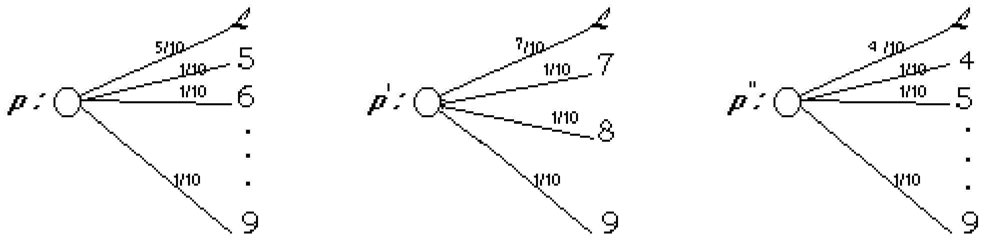
Posons $P_v=5$ — le prix de vente égal à l'équivalent certain —, $P_v'=7$, $P_v''=4$ et notons p, p', et p'' les trois loteries à deux étapes correspondantes :

---

[46] Cet intervalle doit être suffisamment grand pour assurer qu'il contiendra l'équivalent certain de la loterie.

[47] Pour des valeurs appropriées de y, x et π, on retrouve le Pari-P ou le Pari-$ du PRP.

[48] Cette probabilité correspond à la situation dans laquelle P_o est inférieur à P_v. Elle découle de la loi uniforme suivie par P_o.



Si le principe de réduction des loteries composées est respecté,

$$p' \sim p'_R = \left(y,\tfrac{5\pi}{10}\,;x,\tfrac{5(1-\pi)}{10}\,;y,\tfrac{\pi}{10}\,;x,\tfrac{(1-\pi)}{10}\,;y,\tfrac{\pi}{10}\,;x,\tfrac{(1-\pi)}{10}\,;7,\tfrac{1}{10}\,;8,\tfrac{1}{10}\,;9,\tfrac{1}{10}\right)$$

$$\text{et } p \sim p_R = \left(y,\tfrac{5\pi}{10}\,;x,\tfrac{5(1-\pi)}{10}\,;5,\tfrac{1}{10}\,;6,\tfrac{1}{10}\,;\ldots;9,\tfrac{1}{10}\right).$$

Si, de plus, l'axiome d'indépendance est respecté, alors :

$$p \succ p' \Leftrightarrow p_R \succ p'_R \Leftrightarrow \left(6;\tfrac{1}{10}\right) \succ \left(y,\tfrac{\pi}{10}\,;x,\tfrac{1-\pi}{10}\right),$$

ce qui est vérifié, si la dominance est respectée, puisque EC(L)=5.

De la même manière,

$$p \succ p'' \Leftrightarrow \left(y,\tfrac{\pi}{10}\,;x,\tfrac{1-\pi}{10}\right) \succ \left(4,\tfrac{1}{10}\right), \text{ ce qui est vérifié.}$$

Cependant, si les individus ne respectent pas l'axiome d'indépendance, ils peuvent être amenés à annoncer un prix de vente différent de leur équivalent certain. C'est ce que montrent Karni et Safra (1987). Ces auteurs prennent $P_o \in [0.00;9.99]$. Ils posent alors le problème ainsi : quel prix de vente maximise la valeur de la loterie $(L,\frac{P_v}{10};P_v,\frac{1}{1000};P_v+0.01,\frac{1}{1000};\ldots;9.99,\frac{1}{1000})$? Puis, ils prennent un exemple numérique de modèle d'utilité espérée dépendante du rang (Quiggin (1982), Yaari (1987)), lequel est une généralisation de la théorie de l'utilité espérée, ne respectant pas l'axiome d'indépendance. Cet exemple donne *Pari P* $\succ$ *Pari \$*, EC(*Pari P*) >EC(*Pari \$*) et P_v(*Pari \$*) >P_v(*Pari P*), soit un « renversement de prix annoncé ». Plus généralement, ces auteurs montrent que des préférences respectant les propriétés de la théorie de l'utilité espérée *sauf l'indépendance* sont susceptibles d'exhiber des renversements de prix annoncé.

Segal (1988) quant à lui interprète la méthode BDM comme la loterie à deux étapes qui donne la loterie *L* avec une probabilité $\frac{P_v}{10}$ et la loterie $\langle P_v, 9.99 \rangle$ avec une probabilité $1-\frac{P_v}{10}$, $\langle P_v, 9.99 \rangle$ étant la distribution uniforme sur $[P_v, 9.99]$. L'auteur montre alors, à partir d'un exemple numérique, que des préférences transitives, continues et satisfaisant la dominance stochastique du premier ordre et l'indépendance mais *pas la réduction des loteries composées*, peuvent conduire également à *Pari P* $\succ$ *Pari \$*, EC(*Pari P*) >EC(*Pari \$*) et P_v(*Pari \$*) >P_v(*Pari P*).[49]

La Critique de la Sélection Aléatoire d'une Loterie

La procédure de ***sélection aléatoire d'une loterie*** ("Random Lottery-Selection Procedure"), nommée procédure RLS par la suite, a été introduite par Grether et Plott (1979) afin d'éviter des *effets de revenus* au cours des expériences. En effet, lorsque tous les problèmes de décision d'une expérience sont réellement effectués, la richesse du décideur évolue au cours de l'expérience, ce qui peut conduire celui-ci à modifier ses choix.

Dans le cas des expériences relatives au PRP, cet effet revenu peut être à la source d'un renversement de préférence.

Prenons par exemple le contexte de l'expérience 1 de Grether et Plott (1979). Les sujets doivent d'abord effectuer des choix entre trois paires de loteries — sur six paires au total dans l'expérience, lesquelles étaient les mêmes que celles utilisées dans l'expérience 3 de Lichtenstein et Slovic (1971). Puis, des prix de vente sont

---

[49] Keller et alii (1993), s'appuyant sur les implications de l'interprétation de Karni et Safra (1987), mises en évidence par Safra, Segal et Spivak (1990), mènent une expérience dans laquelle un tiers des décisions des sujets contredit l'interprétation de Karni et Safra (1987) mais n'est pas incompatible avec celle de Segal (1988).

établis pour les douze loteries de l'expérience (méthode BDM). Enfin, les choix concernant les trois de loteries restantes sont effectués.

$P_1 = \left(4, \frac{35}{36}; -1, \frac{1}{36}\right)$ et $\$_1 = \left(16, \frac{11}{36}; -1.5, \frac{25}{36}\right)$ est la première paire de loteries, les conséquences étant exprimées en USD. Supposons que le décideur est un maximisateur d'utilité espérée avec pour fonction d'utilité vNM : $u(w) = \begin{cases} w + 49 - (w-7)^2, \forall w < 7.5 \\ w + 48.5 + (w-7)^2, \forall w \geq 7.5 \end{cases}$, où w représente la richesse du décideur. En posant $w=0$ au début de l'expérience, on a $U(P_1)=42.33$ et $U(\$_1)=27.27$, donc $P_1 \succ \$_1$. Si chaque loterie choisie par le décideur est réellement jouée, la richesse de celui-ci augmente au cours de l'expérience[50]. Ainsi, en supposant qu'à l'issue des trois premiers choix la richesse du décideur se soit accrue de *2* USD, les équivalents certains des loteries de la première paire sont : EC(P_1)=3.67 et EC($\$_1$)=7.16. Nous avons donc un renversement de préférence dû à un effet revenu ne remettant nullement en cause la théorie de l'utilité espérée.

La procédure RLS consiste à choisir au hasard *un seul* des problèmes de décision — problème de choix ou d'évaluation — auquel le sujet a été confronté. Le sujet étant informé de cette procédure avant le début de l'expérience, l'effet revenu décrit précédemment n'affecte pas la prise de décision.

Toutefois, Holt (1986) montre que la procédure RLS ne garantit pas l'absence de renversements de préférence *lorsque l'indépendance n'est pas vérifiée*. Dans ce but, l'auteur suppose la réduction vérifiée et présente l'expérience du PRP de la manière suivante. Soit *Pari P* et *Pari $* une paire de loteries particulières avec

---

[50] Dans la plupart des expériences, les espérances mathématiques des loteries objet du choix sont positives. Chez Grether et Plott (1979), ces espérances mathématiques sont comprises entre *1.35* USD et *3.86* USD.

Pari P=(y_p,π_p ; $x_p,1\text{-}\pi_p$) et *Pari \$*=($y_\$,\pi_\$$; $x_\$,1\text{-}\pi_\$$). La méthode BDM est utilisée pour révéler les prix de vente $P_v(Pari\ P)$ et $P_v(Pari\ \$)$: le décideur peut donc être considéré comme confronté à deux loteries :

$$p_P = \left(y_p, \frac{P_v(Pari\ P).\pi_p}{10}; x_p, \frac{P_v(Pari\ P).(1-\pi_p)}{10}; P_v(Pari\ P), \frac{1}{10}; P_v(Pari\ P)+1, \frac{1}{10}; \ldots; 9, \frac{1}{10}\right)$$

et

$$p_\$ = \left(y_\$, \frac{P_v(Pari\ \$).\pi_\$}{10}; x_\$, \frac{P_v(Pari\ \$).(1-\pi_\$)}{10}; P_v(Pari\ \$), \frac{1}{10}; P_v(Pari\ \$)+1, \frac{1}{10}; \ldots; 9, \frac{1}{10}\right),$$

en supposant le prix d'offre de chaque loterie compris entre *0* et *9* pour simplifier. On recourt de plus à la procédure RLS : si le décideur choisit le *Pari-P*, il sait qu'il recevra le *Pari P*, p_P ou $p_\$$ selon le résultat du tirage au sort ; de même, s'il choisit le *Pari \$*, il sait qu'il recevra *Pari \$*, p_P ou $p_\$$. Le problème de choix auquel est confronté le décideur est donc celui du choix entre les deux loteries composées $\left(Pari\ P, \frac{1}{3}; p_P, \frac{1}{3}; p_\$, \frac{1}{3}\right)$ et $\left(Pari\ \$, \frac{1}{3}; p_P, \frac{1}{3}; p_\$, \frac{1}{3}\right)$. Or, *ce problème de choix est équivalent à celui entre le Pari P et le Pari \$ — c'est-à-dire en l'absence de la procédure RLS (et de la méthode BDM) — seulement si l'indépendance est respectée*[51].

[51] La critique de Holt (1986) à l'égard de la procédure RLS vaut également lorsque la seule tâche à effectuer est un choix entre des loteries (ou actions) — donc lorsque la méthode BDM n'intervient pas. En effet, supposons que le sujet soit confronté, pour simplifier, à deux paires de loteries *(p ; q)* et *(p' ; q')* et qu'une seule paire soit tirée au hasard et réellement jouée. La démarche de Holt (1986) conduit, en supposant toujours que le principe de réduction est respecté, à considérer ces deux problèmes de décision comme un seul problème de décision entre les quatre loteries *(p,0.5 ; p',0.5)*, *(p,0.5 ; q',0.5)*, *(q,0.5 ; p',0.5)* et *(q,0.5 ; q',0.5)*. Or, observer une préférence par exemple entre *(p,0.5 ; p',0.5)* et *(q,0.5 ; p',0.5)* ne permet d'en déduire une préférence entre *p* et *q* que si l'indépendance est vérifiée. L'enjeu qui est ici posé dépasse largement la question de la validité expérimentale du PRP puisque qu'il touche la validité de toute expérience reposant

Le PRP apparaît donc de nouveau comme un simple *artefact*. Dans le cas du PRP prévu, lorsque nous observons $Pari\ P \succ Pari\ \$$ et EC(*Pari \$*) >EC(*Pari P*), nous sommes victimes d'une illusion. Alors que selon Karni et Safra (1987) et Segal (1988) observer $P_v(Pari\ \$) > P_v(Pari\ P)$ ne signifie pas EC(*Pari \$*) >EC(*Pari P*), selon Holt (1986), observer $\left(Pari\ P, \frac{1}{3} ; p_P, \frac{1}{3} ; p_\$, \frac{1}{3}\right) \succ \left(Pari\ \$, \frac{1}{3} ; p_P, \frac{1}{3} ; p_\$, \frac{1}{3}\right)$ ne signifie pas $Pari\ P \succ Pari\ \$$.

Ces interprétations sont remises en cause dans la section 5.1.3.1.

Remise en cause théorique de la théorie de l'utilité espérée : généralisations et alternatives

Nous montrons dans cette section que certains aspects méthodologiques et théoriques fondamentaux caractérisant la théorie de l'utilité espérée ne sont en général pas remis en cause par les théories cherchant à expliquer les paradoxes expérimentaux[52]. Ces théories se présentent alors plus comme des généralisations de la théorie de l'utilité espérée que comme des théories alternatives. La généralisation des choix expliqués semble plus difficilement s'accompagner d'une généralisation des choix admissibles d'un point de vue normatif.

---

sur des choix entre des paires de loteries ou d'actions et recourant à la procédure RLS (voir la section 5.1.3.1).

[52] Nous ne recherchons évidemment ici ni l'exhaustivité ni l'exposé approfondi des théories : de telles qualités pourront être trouvées dans Weber et Camerer (1987) et Camerer et Weber (1992), Fishburn (1988a), Willinger (1990), Quiggin (1993), Munier (1995) et, Starmer (2000) et Cohen et Tallon (2001).

Certains fondements théoriques et méthodo-logiques communs

La Nature de l'incertitude

La construction d’une théorie de la décision dans l’incertain nécessite de caractériser cette incertitude de l'environnement du décideur[53].

La théorie EU définit un contexte de ***risque***. C’est le cas le plus simple. On s'intéresse aux situations dans lesquelles les événements pertinents pour la décision sont affectés de ***probabilités*** qui sont considérées comme ***objectives***. Le caractère objectif des probabilités repose soit sur des observations en grand nombre du phénomène caractérisant l'événement soit sur un principe de symétrie qui conduit à définir une probabilité comme le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles.

La plupart des premières théories concurrentes de la théorie de l'utilité espérée se sont situées dans un tel contexte de risque et ont donc cherché à généraliser la théorie EU. C'est le cas des théories de Kahneman et Tversky (1979), de Machina (1982) ou de Quiggin (1982) par exemple.

Cependant, si le contexte de risque dispose d'avantages techniques évidents, sa pertinence pour l'analyse économique est plus discutable. Comme Keynes (1921) ou Knight (1921) l'avaient déjà souligné, la plupart des décisions économiques s'effectuent dans des situations dans lesquelles l'information disponible sur les événements pertinents pour la décision est beaucoup moins riche que celle correspondant à un contexte de risque. D'où l'intérêt du contexte d'***incertitude***.

Nous avons vu que, dans ce contexte d'incertitude, la théorie des ***probabilités subjectives*** développée par Savage (1954) réduit, d'une certaine manière, l'incertitude au risque : les probabilités subjectives, inférées des choix,

[53] L’analyse détaillée de cette question est l’objet du chapitre 3.

sont traitées comme s'il s'agissait de probabilités objectives ; une conséquence étant que l'ambiguïté n'influence pas les décisions. Lorsque la mesure de l’incertitude est donnée par des probabilités subjectives et que l'ambiguïté n’intervient pas, nous parlons de ***probabilités subjectives certaines***. On retrouve une telle approche dans certaines théories alternatives à la théorie de l'utilité espérée : c'est le cas de la théorie du regret de Loomes et Sugden (1982,1987a) et de Sugden (1993) — que nous appelons **théorie du regret avec probabilités subjectives certaines** et que nous notons **RTc** — et de la théorie SSA (Skew-Symmetric Additive) de Fishburn (1989b).

Lorsque, au contraire, l'ambiguïté est considérée comme ayant de l'importance, nous parlerons de ***probabilités incertaines***, celles-ci pouvant être ***objectives*** ou ***subjectives***. La prise en compte de l'influence de l'ambiguïté peut s'effectuer de plusieurs façons, selon le type d'information retenu.

Une première solution consiste à poser l'existence de probabilités de référence dont le caractère ambigu conduit soit à *certaines transformations de ces probabilités de référence* — comme chez Einhorn et Hogarth (1986) et dans la **théorie du regret avec probabilités subjectives incertaines**, notée **RTu** et présentée dans le chapitre 4 — soit à une *modification de l'utilité* (Sarin et Winkler (1992)).

Une autre solution consiste à poser l'existence de *distributions de probabilités multiples*. Il peut exister une unique distribution de probabilité sur chaque probabilité (Segal (1987)) ou un ensemble de distributions de probabilités comme dans la règle du maximin développée par Gilboa et Schmeidler (1989).

Enfin, certains auteurs considèrent, dans la tradition de Keynes (1921), que la notion de probabilité n'est plus pertinente dès lors que l'on n'a pas affaire à des situations où existent des probabilités objectives connues. Ainsi, Schmeidler (1989) et Gilboa (1987) ont recours à des *mesures non additives de l'incertitude* appelées capacités et introduites par Choquet (1953). Les croyances ne sont donc pas représentées par des probabilités subjectives. Cependant, ce sont pas des croyances indépendantes de tout problème de décision puisqu'elles restent, comme chez Savage (1954), déterminées par les préférences sur les actions.

La Nature de l'utilité et des préférences

Traditionnellement et d'une manière générale, l'analyse des décisions économiques recourt au concept d'utilité. Trois clivages concernent la définition de ce concept :

1) *L'approche psychologique de l'utilité* s'oppose à *l'approche préférentialiste*,

2) La *mesure cardinale* de l'utilité se distingue de la *mesure ordinale*,

3) Les *comparaisons interpersonnelles* sont considérées soit comme *acceptables* soit comme *inacceptables*.

Du point de vue de la théorie de la décision individuelle, seuls les deux premiers clivages sont pertinents. Ceux-ci conduisent à quatre cas possibles : approche psychologique et mesure cardinale, approche psychologique et mesure ordinale, approche préférentialiste et mesure cardinale, approche préférentialiste et mesure ordinale.

Le premier cas correspond à la conception de l'utilité introduite par Cramer (1728) et Bernoulli (1738) dans le domaine de l'évaluation subjective de la richesse. Bentham (1789) va donner une interprétation hédoniste de l'utilité, en termes de plaisirs et peines. Ces derniers sont les états mentaux déterminant, seuls, le niveau de bien-être d'un individu, dont l'utilité constitue la mesure. Chez Bernoulli (1738) comme chez Bentham (1789), l'utilité est :

1) définie sans recours à la notion de préférence. L'existence d'une relation de préférence n'est qu'une possibilité, de même qu'il est possible mais non nécessaire que cette relation de préférence reflète l'utilité. Dans ce dernier cas cependant, si

une conséquence est préférée à une autre, c'est simplement parce que la première apporte un niveau de satisfaction supérieur à la deuxième.

2) cardinale et permet ainsi les comparaisons intrapersonnelles d'utilité. Si x_1,x_2,x_3,x_4 sont quatre conséquences monétaires, alors la différence d'utilité entre x_1 et x_2 a une signification en termes de satisfaction et peut être comparée cardinalement à la différence d'utilité (de satisfaction) entre x_3 et x_4.

Cette approche psychologique et cardinale de l'utilité, dominante au XIXème siècle[54], est aujourd'hui marginale en théorie de la décision individuelle dans le risque ou l'incertitude, et généralement dans l'ensemble de la théorie économique. Toutefois, Allais (1952,1979) propose une fonction d'utilité de la richesse similaire à celle de Bernoulli (1738) et qui peut être construite grâce à un questionnaire introspectif. De même, les théories du regret et de la déception de Loomes et Sugden (1982,1986) s'inscrivent explicitement dans cette perspective, bien qu'aucune méthode de détermination de l'utilité ne soit précisée.

La révolution ordinale observée au début du XXème siècle, notamment au travers des travaux de Pareto (1906), a conduit à un rejet quasi systématique de l'approche psychologique et cardinale au profit de l'approche *préférentialiste et ordinale*. A propos de l'utilité, Fisher (1892) et Slutsky (1915) (cités par Sarin et Wakker (1997, p.5)) écrivent respectivement : « "Utility" is the heritage of Bentham and his theory of pleasures and pains. For us his *word* is the more acceptable, the less it is entangled with his *theory* » et «…we must make it completely independent of psychological assumptions and philosophical hypothesis. ».

Selon cette approche — qui trouve son aboutissement dans la théorie moderne du choix du consommateur —, l'analyse économique peut être construite uniquement à partir de *choix observables* et traduisant des *classements* opérés par

[54] Voir Fishburn (1989a) et Allais (1991) pour plus de détails sur l'histoire de l'utilité.

les individus. La question des fondements psychologiques (ou philosophiques) de ces choix est hors de propos. Le concept clé est celui de *préférence* qui constitue la représentation formelle de ces classements, lesquels à la fois se traduisent et se révèlent dans les choix. L'utilité est l'index qui permet une représentation analytique des préférences. Il s'agit d'une mesure ordinale[55] et étrangère à l'idée de mesure de satisfaction. Le recours au concept d'utilité est d'un point de vue théorique largement superflu et d'un point de vue méthodologique sans doute une erreur puisqu'il n'a rien à voir avec son homonyme psychologique.

Toutefois, dans le domaine des décisions individuelles dans le risque (ou l'incertain), la théorie de l'utilité espérée de von Neumann et Morgenstern (puis de Savage) emprunte une voie quelque peu différente : l'approche préférentialiste avec une fonction d'utilité cardinale[56]. Hagen (1994) parmi d'autres, souligne combien ce "retour" à une telle mesure cardinale porte à confusion : « During half a century of ordinalistic dominance, there was a moment of embarrassment: the appearance of the von Neumann / Morgenstern utility index, which was defined up to a linear positive transformation, just as the classical cardinal utility. »[57]. Néanmoins, la

---

[55] Techniquement, cela implique que la fonction d'utilité est définie à une transformation monotone croissante près.

[56] Nous n'abordons pas ici la perspective de Debreu (1959), laquelle correspond, dans le cadre de la théorie de l'équilibre général, à une théorie préférentialiste et ordinale de l'incertain, « libre de tout concept de probabilité et formellement identique à la théorie du cas certain (...) » (Debreu (1959, p.106)). (voir Villion (1999a)).

[57] Rappelons que, dans le modèle von Neumann et Morgenstern, si la relation de préférence est définie sur des distributions de probabilités, la fonction d'utilité de von Neumann et Morgenstern a des conséquences pour argument (une remarque similaire peut

plupart des théories de la décision individuelle dans le risque ou l'incertitude restent aujourd'hui dans le cadre ambigu défini par von Neumann et Morgenstern : refus d'une interprétation psychologique de l'utilité et préservation de la cardinalité de la fonction d'utilité [58].

La Forme du modèle

Lorsqu'il s'agit de formaliser une décision individuelle dans le risque ou l'incertain, deux stratégies différentes — mais non incompatibles — peuvent être adoptées : la *méthode axiomatique* ou la *formalisation de la procédure de décision*.

Le recours à la ***méthode axiomatique***, dominante en économie, est un des apports des théories EU et SEU. Elle consiste à déduire d'un système d'axiomes peu nombreux et indépendants[59], l'existence d'un critère de décision unique. Ce dernier

---

être faite à propos du modèle de Savage). La différence avec une fonction d'utilité psychologique et cardinale devient donc pour le moins subtile.

[58] Peu de travaux adoptent, dans le domaine proprement dit des décisions individuelles dans le risque ou l'incertain, l'approche préférentialiste et ordinale (voir, toutefois, Dubois et al. (1997)). Quant à l'approche psychologique et ordinale, nous ne connaissons aucun exemple.

[59] Von Neumann et Morgenstern (1944, p.25) commentent le choix des axiomes de la manière suivante : « A choice of axioms is not a purely objective task. It is usually expected to achieve some definite aim — some specific theorem or theorems are to be derivable from the axiom — and to this extent the problem is exact and objective. But beyond this there are always other important desiderata of a less exact nature : The axioms should not be too numerous, their system is to be as simple and transparent as possible, and each axiom should have an immediate intuitive meaning by which its appropriateness may be judged directly. In a situation like ours this last requirement is particularly vital, in spite of its

permet d'assurer une prédiction précise des décisions en fonction des caractéristiques du décideur et du problème de décision. Deux catégories d'axiomes peuvent être distinguées :

1) les axiomes *conceptuellement essentiels* sont ceux qui définissent des règles de comportement simples, lesquelles pouvant être jugées facilement du point de vue de leurs fondements psychologiques ou philosophiques.

2) les axiomes *techniques* sont ceux qui doivent être ajoutés aux axiomes conceptuellement essentiels pour assurer l'existence et l'unicité du critère de décision.

Les modèles axiomatiques posent plusieurs questions, notamment :

1) *Comment justifier la présence d'axiomes techniques, au-delà des nécessités mathématiques ?* Autrement dit, comment juger de la pertinence d'un modèle de décision si certains de ses axiomes n'ont pas de fondements psychologiques ou philosophiques ? Le danger est une dérive vers une méthodologie instrumentaliste — du genre de celle défendue par Friedman (1953) — qui va supposer que les agents économiques prennent leurs décisions "comme si" ils satisfaisaient aux axiomes, techniques en particulier. Il s'agit bien d'un danger puisque, selon nous, la force et l'attrait potentiels de la méthode axiomatique tiennent justement à la possibilité de donner au critère de décision des fondements psychologiques et philosophiques clairs : la méthode axiomatique doit permettre de juger les conclusions d'un modèle au regard de la pertinence de ses hypothèses.

2) *L'exigence de simplicité des axiomes conceptuellement essentiels peut-elle être satisfaite ?* Gilboa (1987, p.73) écrit : « The 'essential' axioms are those that are easily defendable on philosophical grounds, and it usually turns out to be the case

vagueness: we want to make an intuitive concept amenable to mathematical treatment and to see as clearly as possible what hypotheses this requires. ».

that they are also easily defended on mathematical grounds, since one can construct simple examples of preference orders, satisfying all the axioms but the one under discussion, but having no Integral-Representation ». Ces propos nous semblent quelque peu optimistes et les exigences mathématiques requises pour obtenir un théorème de représentation sont souvent difficilement compatibles avec la possibilité d'interpréter les axiomes.

Le modèle de Gilboa (1987) se heurte justement aux deux obstacles décrits[60]. Mais ceci est une caractéristique assez générale et inévitable de modèles qui pour la plupart généralisent la théorie de l'utilité espérée en affaiblissant l'axiome d'indépendance, et amènent ainsi à des axiomes plus complexes et/ou plus nombreux. Ajoutons que, si pour la généralisation du modèle EU, le point de départ est un petit nombre d'axiomes simples, pour la généralisation du modèle SEU, le point de départ est (déjà) constitué d'un nombre important d'axiomes dont certains sont relativement complexes.

La stratégie alternative passe par la ***formalisation de la procédure de décision***. Cette procédure comprend l'ensemble des heuristiques et processus mentaux qui interviennent lors de la phase de délibération précédant la décision.

La formalisation est l'expression technique directe des phénomènes psychologiques guidant la procédure de décision. La théorie des perspective (« prospect theory ») de Kahneman et Tversky (1979) constitue un bon exemple puisqu'elle fait appel explicitement à une phase de préparation au choix (« editing phase ») correspondant à des heuristiques mises en œuvre par l'individu pour « organiser et reformuler les options de façon à simplifier l'évaluation et le choix ultérieurs » (Kahneman et Tversky (1979, p.274)). De manière différente, Loomes et

---

[60] Ces difficultés du modèle de Gilboa (1987) sont soulignées par exemple par Zhang (1997).

Sugden (1982, 1986) recourent également à la formalisation de procédures de décision, fondées sur les phénomènes psychologiques de regret et de déception.

Les problèmes d'interprétation du modèle soulignés à propos de la méthode axiomatique disparaissent ici puisque les fondements psychologiques constituent le point de départ du modèle. En revanche, c'est la formalisation et l'observabilité qui vont constituer les principales difficultés de cette méthode. D'une part, la traduction formelle des raisonnements des individus est une opération délicate. D'autre part, la confirmation ou la réfutation du modèle par les faits nécessite l'ajout d'hypothèses supplémentaires dans la mesure où la procédure de décision formalisée est un objet complexe ; plus complexe en général que les règles de comportement représentées par des axiomes.

Il faut souligner, finalement, que des points de départs différents peuvent mener à des modèles similaires. Le meilleur exemple est sans doute donné par la "rencontre" entre les modèles SSB et SSA de Fishburn (1982,1988) et RTc (voir le chapitre 2).

Le statut du modèle et la question de la rationalité

Modèles descriptifs et modèles normatifs, cohérence du choix et cohérence de la décision

Lorsque l'on s'intéresse à la question « Comment les individus effectuent-ils (réellement) leurs choix ? », les études expérimentales présentées dans la section 1.5 montrent que nombre de choix observés contredisent la théorie de l'utilité espérée. C'est donc le ***statut descriptif*** de cette dernière qui est remis en cause et un premier objectif de toutes les théories généralisant à la théorie de l'utilité espérée est d'expliquer les paradoxes expérimentaux.

Cependant, si la théorie de l'utilité espérée peut être considérée comme un ✐mauvais✐ modèle descriptif[61], la remise en cause de son ***statut normatif*** — c'est-à-dire sa prétention à répondre à la question « Comment les individus (rationnels) doivent-ils choisir ? » — suppose de démontrer que la définition de la rationalité contenue dans cette théorie est trop étroite[62]. Nous montrons, dans cette section, que la façon d'atteindre cet objectif dépend le plus souvent de la forme du modèle retenue (section 1.6.1.3).

La *méthode axiomatique* est celle qui permet de discuter le plus directement la question du statut normatif d'un modèle. Les modèles généralisant la théorie de l'utilité espérée et ayant une visée normative recourent, dans leur grande majorité, à cette méthode et traitent la question de la rationalité comme cela est fait dans la

---

[61] Cette affirmation, qui découle de la ✐première génération✐ d'études expérimentales — celle que nous avons présenté dans la section 1.5 et dont l'objectif est de tester la théorie de l'utilité espérée — semble à nuancer au regard des résultats de la ✐deuxième génération✐ d'études expérimentales — celle dont nous présentons certains aspects dans le chapitre 5 et dont l'objectif est de tester les théories généralisant la théorie de l'utilité espérée. Par exemple, Hey et Orme (1994) montrent que, pour de nombreux sujets, la théorie EU n'est pas moins performante globalement que plusieurs de ses généralisations. A partir d'une démarche expérimentale différente, Abdellaoui et Munier (1994a,b) montrent que, si certaines généralisations de la théorie EU font mieux que cette dernière pour certaines structures de risque, en revanche, la théorie EU réalise de bonnes ✐performances✐ pour d'autres structures de risque (voir aussi Munier (1995)).

[62] Nous nous cantonnons à une *conception* ***instrumentale*** *de la rationalité* : quelle est l'action permettant d'atteindre au mieux des fins données ? Voir Sugden (1991) pour une réflexion sur la rationalité instrumentale et, par exemple, Sugden (1991) et Hargreaves Heap (1992) pour la présentation d'autres conceptions de la rationalité.

théorie de l'utilité espérée c'est-à-dire au travers de l'analyse des implications des axiomes en termes de choix : la rationalité est alors synonyme de ***cohérence du choix***[63]. Or, le rejet ou l'affaiblissement des axiomes de la théorie de l'utilité espérée semblent, de ce point de vue, difficiles à justifier sur le plan normatif, en particulier car cela conduit à des paris hollandais ou des incohérences dynamiques (voir les sections 1.4 et 1.5.1.3 ainsi que Machina (1989) et Sarin (1992)). Fishburn (1988a, p.48) résume la situation : « At the present time, most theorists regard the reduction principle (perhaps qualified), asymmetry of strict preference, and first-degree stochastic dominance as normatively essential, and there is little concern about possible failures of the Archimedean axiom. Some people stand by the independence axiom, but many theorists no longer accept its normative inviolability and have replaced it with weaker conditions. Of the von Neumann-Morgenstern axioms, this leaves transitivity, the bulwark of economic rationality. My own view that transitivity can no longer be regarded as a tenet of the normative creed is presently a minority position. ».

Les *modèles qui formalisent la procédure de décision*, lorsqu'ils n'ont pas une visée exclusivement descriptive, situent la question de la rationalité à un autre moment de la décision. Il ne s'agit pas d'étudier la cohérence des choix qui découlent de certains axiomes mais d'apprécier la ***cohérence de la décision*** en tant que cohérence des processus mentaux qui conduisent au choix. Une telle perspective suppose, d'une part, de déterminer si les individus ont un

---

[63] Nous pouvons citer Sugden (1991, p.758) qui, à propos de la théorie SEU, remarque : « although Savage's axioms are formulated in terms of the concept of preference, it seems that he regards choice as the more fundamental concept : the idea is to construct a theory of rational choice, not of rational preferences. ».

comportement optimisateur — c'est-à-dire s'ils connaissent leurs objectifs et cherchent les actions permettant de les satisfaire au mieux. D'autre part, dans la mesure où il s'agit de comprendre comment et pourquoi une action a été choisie, cette perspective impose la connaissance des ✎désirs✎ pouvant motiver le choix ou, dit autrement, des ✎causes des préférences✎. Un modèle normatif adoptant cette démarche doit donc décrire les actions d'un individu qui à la fois a des raisons explicites d'agir et procède correctement pour atteindre ses fins.

Précisons que, si le fondement normatif d'un modèle formalisant la procédure de décision semble directement constitué par la cohérence des décisions qu'il décrit, les modèles axiomatiques peuvent également être justifiés sur le plan normatif de la même manière. Pour cela, il faut que les axiomes puissent faire l'objet d'une interprétation psychologique immédiate de façon à avoir une théorie des *préférences* rationnelles et non, seulement, des *choix* rationnels.

Quels modèles normatifs ?

Certaines théories alternatives à la théorie de l'utilité espérée peuvent-elles être dotées d'un statut normatif ou, au contraire, la théorie de l'utilité espérée constitue-t-elle l'unique modèle normatif ?

Citons d'abord deux remarques faites par Fishburn (1992, p.4) et qui rappellent que, si une réponse est donnée à cette question, sa validité ne peut être universelle :

« First, a normative decision theory is a creed, a set of principles adhered to and defended by its followers. Unlike a scientific or descriptive theory, it is not subject to empirical verification or refutation. Thus a normative theory has no defense apart from appeals to common sense, ethical, dicta, and so forth. (...).

Second, normative theories are culturally conditioned. Predominant normative attitudes toward expected utility in particular and transitivity in general have been influenced by Platonism and Scottish common sense philosophy in western thought. The ideal that things should be nicely ordered and that this will be transparent to all right thinking people are powerful magnets. (…). Perhaps it is time to adopt a more relativistic attitude toward the meaning of 'normative' in decision theory. ».

Ceci étant posé, il semble bien que, pour une large majorité de théoriciens, la théorie de l'utilité espérée reste le modèle définissant le décideur rationnel dans le risque et dans l'incertain. Les réponses explicites sont peu nombreuses. Une se trouve chez Tversky et Kahneman (1986) qui affirment : « The dream of constructing a theory that is acceptable both descriptively and normatively appears unrealizable. » (Tversky et Kahneman (1986, p.88)). La raison est principalement que, sur le plan normatif, les principes d'invariance et de dominance simple sont « essentiels » (Ibid., p.70) et l'indépendance est « attrayante » (Ibid., p.88). Or, sur plan descriptif, ces propriétés ne sont pas « valides » (Ibid.). Par conséquent, la théorie des perspectives développée par les auteurs (Kahneman et Tversky (1979)) et qui a pour spécificité d'admettre, notamment, les effets de contexte, est présentée comme exclusivement descriptive : « Prospect theory differs from the other models (…) in being unabashedly descriptive and in making no normative claims. » (Tversky et Kahneman (1986, p.88)).

Ainsi que le souligne Anand (1993), dire que la rationalité est définie par la théorie de l'utilité espérée amène à considérer que les théories généralisant cette dernière sont des théories de l'action irrationnelle, « a position that for many would be at least as unwelcome as dropping the assumption of rationality. » (Anand (1993, p.2))[64].

---

[64] Une position qui n'est d'ailleurs pas la bien venue même pour la théorie des perspectives. Car, si Tversky et Kahneman recourent fréquemment à l'idée que

D'autres auteurs cherchent un compromis (ou une échappatoire ?) comme celui qui consiste à conférer aux théories alternatives à la théorie de l'utilité espérée un *statut prescriptif* (voir Sarin (1992) par exemple). Prescriptif et normatif sont parfois considérés comme synonymes, mais, en suivant (Bell et alii. (1988)), le *statut prescriptif* se définit à partir de la question : « Comment une personne réelle — c'est-à-dire non pas un automate idéalisé, mythique, ✐dé-psychologisé✐ mais un individu possédant une psyché, des émotions, des capacités et des besoins particuliers — peut-elle faire de meilleurs choix ? ». Ceci implique de « choisir une rationalité » (Munier (1995, p.6)), donc un modèle spécifique à la situation donnée.

La position de Machina (1989) semble assez proche de cette attitude, bien que, d'une part, la problématique se déplace des caractéristiques du décideur vers les caractéristiques du problème de décision et, d'autre part, le « but normatif »

---

les individus font des erreurs, sont victimes d'illusions — et sont donc, de ce point de vue, irrationnels —, ils préservent également l'idée d'optimisation. Dans la théorie des perspectives cumulées (Tversky et Kahneman (1992)) l'optimisation est même prédominante puisque la phase préparatoire au choix — celle de la théorie des perspectives de Kahneman et Tversky (1979) — a disparu. Les auteurs semblent finalement ✐naviguer✐ entre deux objectifs très éloignés : la description de comportements irrationnels et la représentation de choix compatibles avec une conception instrumentale de la rationalité. Il est, en outre, intéressant de noter que, bien que les auteurs se réfèrent à l'approche en termes de rationalité limitée initiée par Simon (1955,1978) (voir Tversky et Kahneman (1986, pp.88-89)), selon Gigerenzer et Selten (2001) : « Bounded rationality is neither optimization nor irrationality. » (Gigerenzer et Selten (2001, p.4), « It provides an alternative to current norms, not an account that accepts current norms and studies when humans deviate from these norms. » (Ibid., p.6).

semble ici plus accessible pour les théories alternatives[65]. L'auteur montre que la plupart des choix violant la théorie de l'utilité espérée mais compatibles avec les théories alternatives ne semblent pas irrationnels car ils peuvent s'expliquer par des traits psychologiques ou états émotionnels (déception, regret, jalousie, sentiment d'injustice…) — dans la mesure où ces états émotionnels sont à l'origine d'une non séparabilité entre les événements et/ou entre les actions ou perspectives risquées. L'auteur rappelle alors que, si les conséquences sont décrites de façon à leur intégrer ces états émotionnels, les choix considérés peuvent ne plus apparaître comme des violations de la théorie de l'utilité espérée[66]. Dans ce dernier cas, la théorie de l'utilité espérée peut être considérée comme *le* modèle de choix rationnel sans être ✐dé-psychologisé✐. Cependant, selon Machina (1989), le niveau de description requis pour ✐faire disparaître les paradoxes✐ peut se situer « en dessous du niveau habituel auquel les économistes travaillent ou qu'ils peuvent observer (…). » (Machina (1989, p.1663)) et, dans ce contexte, les choix non

[65] Machina (1989) développe d'autres arguments que celui présenté dans ce paragraphe. Mais ces arguments ont une portée moins générale puisqu'ils concernent seulement les théories remettant en cause l'indépendance. Pour ces dernières, un rejet clair du statut normatif de l'indépendance — au sens où est définie cette propriété dans la théorie de l'utilité espérée —, se trouve chez McClennen (1990) dans le contexte des choix dynamiques.

[66] La question de la définition des conséquences a souvent été abordée pour justifier l'axiome d'indépendance : voir Samuelson (1952) (cité par Machina (1989)), les débats autour du paradoxe de Bergen (Drèze (1974)) et les modèles avec des préférences dépendantes des états (Karni, Schmeidler et Vind (1983)). Cependant, la même question intervient également dans la justification de la transitivité (voir la section (2.2.1.2)).

irrationnels dont il est question ne sont compatibles qu'avec des théories alternatives à la théorie de l'utilité espérée.

Enfin, quelques auteurs refusent de manière globale d'accorder à la théorie de l'utilité espérée le statut de modèle définissant la décision rationnelle. Sugden (1985a,1985b,1991) montre que la théorie de l'utilité espérée ne suffit pas pour représenter la cohérence de la décision ni même la cohérence du choix. En particulier, l'auteur défend le statut normatif de RTc (voir les sections 2.1.3 et 2.4.1). Anand (1993) montre que les axiomes de la théorie de l'utilité espérée ne peuvent être identifiés à des canons devant guider les agents rationnels.

Rationalité instrumentale et rationalité cognitive

La rationalité cognitive « traduit l'adéquation que réalise le décideur entre les informations qu'il possède et les représentations qu'il se forge, et traduit son efficacité dans la construction et la gestion de son savoir. » (Walliser (2000, p.74)). La rationalité instrumentale « traduit l'adéquation que réalise le décideur entre les moyens dont il dispose et les objectifs qu'il poursuit, et traduit son efficacité dans la confrontation du possible et du souhaitable. » (Ibid., pp.74-75).

La question de la rationalité cognitive est quasi absente dans les modèles normatifs généralisant la théorie de l'utilité espérée. Nous pouvons aborder les raisons de cette quasi absence à partir des deux aspects de la rationalité cognitive.

Premièrement, la rationalité cognitive concerne la perception du problème de décision par l'individu. Dans tous les modèles auxquels nous nous intéressons, le décideur est censé connaître la liste des alternatives (actions, loteries), la liste des événements pertinents et la liste des conséquences contingentes aux événements attachées aux alternatives. Autrement dit, le problème de décision est perçu par le décideur comme il l'est par le modélisateur. En particulier, la présentation d'un problème de décision sous forme de loteries ou sous forme de matrice de décision n'a généralement pas d'influence sur la décision et, si cela est le cas — comme dans la théorie du regret —, cette influence est justifiée dans le cadre de la rationalité instrumentale et non par une hypothèse de rationalité cognitive limitée. De plus, le décideur est également supposé capable de réaliser les calculs nécessaires pour faire le lien entre les différentes conséquences et ses propres objectifs éventuels.

En résumé, les modèles que nous étudions postulent tous que les individus sont dotés de capacités informationnelles et computationnelles illimitées et s'écartent donc de la perspective défendue par Simon (1955,1978).

Deuxièmement, la rationalité cognitive s'exprime dans la manière qu'a le décideur d'appréhender l'incertitude. Dans ce domaine également, les principes fondamentaux retenus par la théorie de l'utilité espérée se retrouvent dans les théories généralisées. Soit les modèles retiennent, dans le prolongement de la théorie EU, des probabilités objectives (voir la section 1.6.1) ; la rationalité cognitive est alors réduite à l'absence d'erreurs dans le traitement et l'utilisation de ces probabilités. Soit les modèles retiennent l'approche subjective de l'incertitude que l'on trouve dans la théorie SEU c'est-à-dire reposant sur des croyances du décideur qui « ne sont pas prédéterminées par sa vision du monde, mais [qui] ne prennent sens que par leur intervention dans un processus de décision. » (Walliser (2000, p.90)). La rationalité cognitive est alors réduite à la cohérence des choix qui mènent à l'élaboration des croyances : elle est déterminée par la rationalité instrumentale.

Dans ce chapitre, nous avons d'abord présenté la théorie de l'utilité espérée et des définitions générales. La théorie de l'utilité espérée souffre de faiblesses descriptives révélées au travers du paradoxe d'Allais et du phénomène des renversements de préférences pour la théorie EU et du paradoxe d'Ellsberg pour la *théorie SEU. Pourtant, elle reste, depuis plusieurs décennies, une norme dans la théorie de la décision dans le risque et dans l'incertain. La plupart des modèles généralisant la théorie de l'utilité espérée fournissent un théorème de représentation des préférences permettant, grâce à un affaiblissement de l'axiome d'indépendance, d'expliquer certains paradoxes expérimentaux. Dans ce but, ils conservent des fondements communs avec les théories EU ou SEU, en particulier, une même conception de l'incertitude, de l'utilité et des préférences. Parallèlement, le statut descriptif ou normatif de ces théories généralisées est difficile à affirmer. La théorie du regret quant à elle possède, à de nombreux égards, une place atypique et peut être vue comme une théorie alternative plus que comme une généralisation de la théorie de l'utilité espérée. L'étude détaillée de RTc est l'objet du chapitre 2.*